UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

54. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT
MIT 4 ABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM NOVEMBER 1950)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1950

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

54. Band/4. Heft

Inhaltsverzeichnis

Seite

Koschmieder, L. Ein Gefüge von Differentialgleichungen, durch elliptische Funktionen integriert 265

Prachar, K. Über bedingt konvergente Vektorreihen im Banach'schen Raum 284

Knödel, W. Reduzible Zahlen 308

Schmetterer, L. Beitrag zur Multiplikation unendlicher Reihen 313

Wunderlich, W. Zur Geometrie gewisser Glanzerscheinungen 330

Hadwiger, H. Einige Anwendungen eines Funktionalsatzes für konvexe Körper in der räumlichen Integralgeometrie 345

Buchbesprechungen 354

Ein Gefüge von Differentialgleichungen, durch elliptische Funktionen integriert.

Von
Lothar Koschmieder, Tucumán.

(Eingelangt am 26. Oktober 1949.)

1. Untersuchungen von Lemke[1,1]) erwiesen die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{d z^2} = 2 u^3 \tag{1, 1}$$

unerwartet dadurch als bedeutsam, daß sie zu einer allgemeinen von Liouville[1,2] behandelten Gestalt L von Differentialgleichungen erster Ordnung in Beziehung trat. Da sich andererseits (1, 1) leicht durch elliptische Funktionen integrieren läßt, so konnte Lemke überraschend auch L durch elliptische, und zwar harmonische (lemniskatische) Funktionen lösen. Er legte auch dar, wie gewisse, L in sich selbst überführende rationale Transformationen mit Transformationen T_e der elliptischen Funktionen zusammenhängen. Dabei stellt es sich als nützlich heraus, (1, 1) durch ein Gefüge G *zweier* Differentialgleichungen *erster* Ordnung zu ersetzen, das auf diese Weise sogleich auch integriert wird. Deutet man die beiden Veränderlichen der auf G wirkenden Transformation T_G, also die Unbekannten in G, als Koordinaten eines Punktes in der Ebene, so strebt bei der Folge der wiederholten Transformationen T_G die Folge der ihnen zugeordneten Punkte gegen eine Stelle einer geometrisch leicht zu schildernden Parabel. Der Gleichung dieses Ortes entspricht, wenn man von G zu (1, 1) zurückkehrt, eine Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integral eine Sonderlösung von (1, 1) ist. Wenn man daher auf die allgemeine Lösung von (1, 1) die Folge der Transformationen T_e ausübt, so ergibt sich eine Folge von Funktionen, die alle der Gleichung (1, 1) genügen, und deren Grenzfunktion gleich jener Sonderlösung ist.

[1,1] *H. Lemke*, S. B. Berliner math. Ges. 18 (1920), 26—31.
[1,2] *R. Liouville*, Acta math., Uppsala 27 (1903), 55—78, bes. S. 63—72.

In einer umfassenderen Abhandlung ist Lemke noch einmal auf das zu (1, 1) gehörige Gefüge

$$\frac{du}{dz} = v, \quad \frac{dv}{dz} = 2u^3 \tag{1, 2}$$

zurückgekommen[1,3], hat aber dort auch weitere Gefüge behandelt, z. B. das folgende[1,4]:

$$\frac{du}{dz} = v, \quad \frac{dv}{dz} = \frac{3}{2}u^2. \tag{1, 3}$$

Bei seiner Integration übernehmen *äquianharmonische* elliptische Funktionen die Rolle, die bei (1, 2) harmonische Gebilde dieser Art gespielt hatten. Hier will ich mich mit der naheliegenden Aufgabe der Lösung des Gefüges

$$\frac{du}{dz} = v^2 \quad (1, 41), \qquad \frac{dv}{dz} = u^2 \tag{1, 42}$$

befassen[1,41], dem ich zu bequemerem Anschlusse an Bekanntes, die Abhängige v durch $-v$ ersetzend, die Gestalt gebe

$$\frac{du}{dz} = v^2 \quad (1, 51), \qquad \frac{dv}{dz} = -u^2. \tag{1, 52}$$

(1, 5) wird sich durch besondere äquianharmonische Funktionen lösen lassen, deren Gebrauch, wie ich vor längerer Zeit dartat[1,5], in der *Zahlentheorie* einen einfacheren transzendenten Beweis des kubischen Reziprozitätsgesetzes ermöglicht als das zunächst sich darbietende Hilfsmittel, die $\wp$-Funktion selbst. Das folgende zeigt den Nutzen dieser besonderen Gebilde auf dem durch die Aufgabe (1, 5) bezeichneten, ganz anders gearteten Gebiete. Sie ermöglichen eine Behandlung des Gefüges (1, 5), die mit Lemkes geschilderten Ausführungen über (1, 2) weitgehend gleichläuft. — Am Schlusse mögen noch einige Bemerkungen vornehmlich geschichtlicher Art Platz finden, die sich auf die genannte zahlentheoretische Anwendung beziehen.

[1,3] *Lemke*, J. reine angew. Math. 180 (1939), 141—188; siehe dort bes. S. 185, 188. — Die Unabhängige heißt in dieser Arbeit τ; ich bleibe bei ihrem in [1,1] verwendeten Namen z.

[1,4] Siehe [1,3], S. 187f.

[1,5] *L. Koschmieder*, a) Math. Ann., Berlin 83 (1921), 280—285; b) S. B. Berliner math. Ges. 21 (1922), 12—15. Die erste dieser beiden Arbeiten wird weiterhin mit *A.*, die zweite mit *B.* angeführt.

[1,41] Siehe dazu den „Zusatz vor der Druckprobe" am Ende der Arbeit.

2. Zu elliptischen Funktionen kommt man von (1, 5) wie folgt: Schreibt man [3,1] U und V statt u und v und setzt $V = (d\,U/d\,z)^{1/3}$ in (1, 52) ein, so erhält man

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dz}\right)^{-1/3}\frac{d^2U}{dz^2} = -U^2, \quad \frac{3}{2}\left(\frac{dU}{dz}\right)^{1/3}\frac{d^2U}{dz^2} = -3\,U^2\,\frac{dU}{dz} \tag{2, 1}$$

und hieraus durch Integration mit einem willkürlichen Festwert C

$$\left(\frac{d\,U}{d\,z}\right)^{3/2} = C^3 - U^3, \quad \frac{d\,U}{d\,z} = (C^3 - U^3)^{2/3}, \tag{2, 2}$$

$$d\,z = \frac{d\,U}{(C^3 - U^3)^{2/3}} \tag{2, 3}$$

Wenn man die Veränderlichen z und U mit dem Ansatze

$$z = \sqrt{3}\;C^{-1}\,t, \quad U = C\,X \tag{2, 4}$$

durch t und z ersetzt, verwandelt sich (2, 3) in

$$\sqrt{3}\;d\,t = \frac{d\,X}{(1 - X^3)^{2/3}}, \text{ so daß } \sqrt{3}\;(t - t_0) = \int_1^X \frac{d\,S}{(1 - S^3)^{2/3}} \tag{2, 5}$$

wird, unter t_0 einen Festwert verstanden. Die Umkehrung des Integrals (2, 5) wird nach A., (2), (3), von der Funktion

$$X = \varphi\,[-(t - t_0)] = \frac{\wp'\,(t - t_0) - \sqrt{3}}{\wp'\,(t - t_0) + \sqrt{3}} \tag{2, 6}$$

bewirkt; die Invarianten der Weierstraßschen äquianharmonischen $\wp$-Funktion sind $g_2 = 0$, $g_3 = 1$, und als ihre Hauptperioden können $2\,\omega = 2\int_{4^{-1/3}}^{\infty}(4\,s^3 - 1)^{-1/3}\,d\,s$ und $2\,\varepsilon\,\omega$ gewählt werden, wo ε die komplexe dritte Einheitswurzel $exp\,(2\,\pi\,i/3)$ bedeutet. Kehrt man von t, X nach (2, 4) zu z, U zurück, so erkennt man, daß das Gefüge (1, 5) von den Funktionen

$$U = C\,\varphi\,[-\frac{C}{\sqrt{3}}\,(z - z_0)] = C\,\frac{\wp'\,[(C/\sqrt{3})\,(z - z_0)] - \sqrt{3}}{\wp'\,[(C/\sqrt{3})\,(z - z_0)] + \sqrt{3}} \tag{2, 7}$$

und — nach (1, 51), (2, 2) und der zweiten Gleichung A., (4) —

$$V = C\,\psi\,[-\frac{C}{\sqrt{3}}\,(z - z_0)] = C\,\frac{2\sqrt{3}\;\wp\,[(C/\sqrt{3})\,(z - z_0)]}{\wp'\,[(C/\sqrt{3})\,(z - z_0)] + \sqrt{3}} \tag{2, 8}$$

mit festem z_0 gelöst wird. Man ersieht aus diesen beiden Formeln, daß U und V bei reellen Werten von z, z_0 und C selbst reell sind.

3. Man übe auf das Differential (2, 3) die Verwandlung aus

$$\frac{u^3}{c^3} = \frac{C - \varepsilon U}{U - \varepsilon C}, \quad {}^{3,1} \tag{3, 1}$$

$$u = c \left(\frac{C - \varepsilon U}{U - \varepsilon C}\right)^{1/3}, \tag{3, 2}$$

von deren Wesensart in Nr. 6 die Rede sein wird.

Aus (3, 2) folgt

$$d u = \frac{c}{3} \left(\frac{U - \varepsilon C}{C - \varepsilon U}\right)^{2/3} \frac{(\varepsilon^2 - 1) C}{(U - \varepsilon C)^2} d U$$

$$= \frac{c C}{3} \varepsilon (\varepsilon - \varepsilon^2) (C - \varepsilon U)^{-2/3} (U - \varepsilon C)^{-4/3} d U,$$

aus (3, 1), da $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$ ist,

$$c^3 - u^3 = c^3 \varepsilon^2 \frac{C - U}{U - \varepsilon C}, \quad (c^3 - u^3)^{-2/3} = c^{-2} \varepsilon^{-4/3} (C - U)^{-2/3} (U - \varepsilon C)^{2/3}$$

— mit $\varepsilon^{-4/3} = \exp(-8\pi i/9)$ usw. —, so daß

$$\frac{c\, d\, u}{(c^3 - u^3)^{2/3}} = \frac{C}{3} \varepsilon (\varepsilon - \varepsilon^2) \varepsilon^{-4/3} (C - U)^{-2/3} (C - \varepsilon U)^{-2/3} (U - \varepsilon C)^{-2/3} d U$$

oder, weil $\varepsilon - \varepsilon^2 = i\sqrt{3}$, schließlich

$$\frac{c\, d\, u}{(c^3 - u^3)^{2/3}} = \frac{i \varepsilon}{\sqrt{3}} \frac{C\, d\, U}{(C^3 - U^3)^{2/3}} \tag{3, 3}$$

wird. Der Wandel (3, 1) führt also (2, 3) in ein Differential derselben Gestalt über. — Man kann u und v entsprechend den Ausdrücken (2, 7), (2, 8) von U und V durch φ und ψ darstellen. An Stelle von C rückt dabei c; dagegen bleibt z_0 ungeändert, weil nach (3, 1) die Werte $U = C$, $u = c$ zusammengehören und $\varphi(0)$ nach (2, 6) gleich 1 zu setzen ist. Fest bleiben auch die Invarianten $g_2 = 0$, $g_3 = 1$ der $\wp$-Funktion.

Treten die zunächst willkürlichen Festwerte C und c in die Beziehung

$$c = \frac{i \varepsilon}{\sqrt{3}} C \qquad (3, 4), \qquad c^6 = -\frac{C^6}{3^3}, \tag{3, 5}$$

so erhält man eine *ein*fach unendliche Schar von Verwandlungen (3, 1), die zu den Gleichungen

---

3,1 Die Zeichen U, u sind so gewählt, daß in (3, 6) U mit C, u nach (3, 4) mit dem Festwert $c = i\,\varepsilon\, C/\sqrt{3}$ von kleinerem Betrage zusammengehört.

$$\frac{dU}{(C^3 - U^3)^{2/3}} = \frac{du}{[(iC/\sqrt{3})^3 - u^3]^{2/3}} \tag{3, 6}$$

führen, also das Differential (2, 3) in immer neue gleicher Form mit den Festwerten $(i\,\varepsilon/\sqrt{3})^n\,C$ $(n = 1, 2, \ldots)$ übergehen lassen.

4. Um jetzt den dem Ansatze (3, 1), (3, 4) entsprechenden Wechsel des Veränderlichenpaares U, V zu finden, der die Differentialgleichungen

$$\frac{dU}{dz} = V^2 \qquad (4, 11), \qquad \frac{dV}{dz} = -U^2 \qquad (4, 12)$$

in das Gefüge (1, 5) verwandelt, ihre Form also bewahrt, rechne man (3, 1) mit Rücksicht auf (3, 4) in

$$U = C\,\frac{\varepsilon\,u^3 + c^3}{u^3 + \varepsilon\,c^3} = \frac{\sqrt{3}\,c}{i\,\varepsilon}\,\frac{\varepsilon\,u^3 + c^3}{u^3 + \varepsilon\,c^3} \tag{4, 2}$$

um. Nun ist nach (1, 51) und (2, 2)

$$\frac{du}{dz} = v^2 = (c^3 - u^3)^{2/3}, \quad (4, 3) \qquad v^3 = c^3 - u^3, \quad (4, 4) \qquad c^3 = u^3 + v^3,$$

mithin geht (4, 2) in

$$U = \frac{\varepsilon^2\sqrt{3}}{i}\,(u^3 + v^3)^{1/3}\,\frac{u^3 - \varepsilon\,v^3}{u^3 - \varepsilon^2 v^3} \tag{4, 5}$$

über. Weiter wird nach (4, 3) bei Ersatz der kleinen durch die großen Buchstaben, ferner nach (3, 4) und (4, 4)

$$V^3 = C^3 - U^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^3 c^3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^3 (u^3 + v^3)\left(\frac{u^3 - \varepsilon\,v^3}{u^3 - \varepsilon^2 v^3}\right)^3$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^3 (u^3 + v^3)\left[1 - \left(\frac{u^3 - \varepsilon\,v^3}{u^3 - \varepsilon^2 v^3}\right)^3\right] = \left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^3 3\,i\sqrt{3}\,\frac{u^3 v^3 (u^3 + v^3)^2}{(u^3 - \varepsilon^2 v^3)^3}$$

und, wenn man von den zunächst offenen Bestimmungen der dritten Wurzel zweckmäßig[5, 1] die mit dem Malteil ε behaftete wählt,

$$V = -3\,\varepsilon\,(u^3 + v^3)^{2/3}\,\frac{u\,v}{u^3 - \varepsilon^2 v^3}. \tag{4, 6}$$

Hier läßt sich eine Probe einschalten: Es muß

$$U^3 + V^3 = C^3 = \left(\frac{c\sqrt{3}}{i}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^3 (u^3 + v^3) \tag{4, 7}$$

sein; Bestätigung nach (4, 5) und (4, 6).

5. Bei der nicht ganz einfachen Bauart der Übergänge (4, 5), (4, 6) scheint es mir am Platze, sich zu vergewissern daß sie das Gefüge (4, 1), tatsächlich in (1, 5) überführen. Es nimmt zunächst die Gestalt an

$$U_u \frac{du}{dz} + U_v \frac{dv}{dz} = V^2, \qquad V_u \frac{du}{dz} + V_v \frac{dv}{dz} = -U^2;$$

seine Auflösung nach du/dz, dv/dz ergibt

$$\frac{du}{dz} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad \frac{dv}{dz} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad \text{mit} \qquad \Delta = \frac{\partial (U, V)}{\partial (u, v)}, \tag{5, 1}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} V^2 & U_v \\ -U^2 & V_v \end{vmatrix}, \tag{5, 21}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} U_u & V^2 \\ V_u & -U^2 \end{vmatrix}. \tag{5, 22}$$

Nachzuprüfen bleibt also, ob

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = v^2, \tag{5,31}$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta} = -u^2 \tag{5, 32}$$

ist. Man findet

$$U_u = -(1-\varepsilon)(u^3+v^3)^{-2/3}(u^3-\varepsilon^2 v^3)^{-2} \cdot u^2 [(u^3-\varepsilon v^3)(u^3-\varepsilon^2 v^3) + 3\varepsilon(1-\varepsilon) v^3 (u^3+v^3)], \tag{5, 41}$$

$$U_v = -(1-\varepsilon)(u^3+v^3)^{-2/3}(u^3-\varepsilon^2 v^3)^{-2} \cdot v^2 [(u^3-\varepsilon v^3)(u^3-\varepsilon^2 v^3) - 3\varepsilon(1-\varepsilon) u^3 (u^3+v^3)], \tag{5,42}$$

$$V_u = -3\varepsilon(u^3+v^3)^{-1/3}(u^3-\varepsilon^2 v^3)^{-2} \cdot v [2u^3(u^3-\varepsilon^2 v^3) - (u^3+v^3)(2u^3+\varepsilon^2 v^3)], \tag{5, 43}$$

$$V_v = -3\varepsilon(u^3+v^3)^{-1/3}(u^3-\varepsilon^2 v^3)^{-2} \cdot u [2v^3(u^3-\varepsilon^2 v^3) + (u^3+v^3)(u^3+2\varepsilon^2 v^3)]. \tag{5, 44}$$

Um Δ (5,1) zu ermitteln, sehe man zunächst von den in der jeweils ersten Zeile der Teilableitungen stehenden Malteilen ab und berechne die Determinante δ, deren Elemente ihre zweiten Malteile sind. Da diese bei Auflösung der eckigen Klammern als Summen je zweier Posten erscheinen, zerfällt δ in vier Determinanten $\delta_1, \ldots, \delta_4$, deren erste δ_1 verschwindet. Die übrigen findet man, indem man aus ihren Reihen gemeinsame Malteile heraushebt, zu

$$\delta_2 = v^3(u^3+v^3)(u^3-\varepsilon^2 v^3)[2u^6 + (4\varepsilon - 5\varepsilon^2) u^3 v^3 - v^6],$$

$$\delta_3 = u^3(u^3+v^3)(u^3-\varepsilon^2 v^3)[u^6 + (5\varepsilon - 4\varepsilon^2) u^3 v^3 - 2v^6],$$

[5,1] An Δ (5,5) bewährt sich, wie sich in Verbindung mit (5,7) zeigen wird, die bei V (4,6) getroffene Wahl der dritten Wurzel.

$$\delta_4 = -3(\varepsilon - \varepsilon^2)\, u^3 v^3 (u^3 + v^3)^2 (u^3 - \varepsilon^2 v^3),$$

und es ergibt sich

$$\delta = \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = (u^3 + v^3)(u^3 - \varepsilon^2 v^3)(u^9 - 3\varepsilon^2 u^6 v^3 + 3\varepsilon^4 u^3 v^6 - v^9)$$
$$= (u^3 + v^3)(u^3 - \varepsilon^2 v^3)^4;$$

daher wird[5, 1]

$$\Delta = (1-\varepsilon)\, 3\varepsilon (u^3+v^3)^{-1}(u^3-\varepsilon^2 v^3)^{-4}(u^3+v^3)(u^3-\varepsilon^2 v^3)^4 = 3i\sqrt{3}. \quad (5,5)$$

Zweitens berechne man Δ_1 — nach (4, 5), (4, 6), (5, 42), (5, 44). Man ziehe den Malteil $(u^3 - \varepsilon^2 v^3)^{-4}$ aus der Determinante heraus und schreibe

$$\frac{1}{3}(u^3 - \varepsilon^2 v^3)^4 \Delta_1 = \Delta_1^* =$$

$$\begin{vmatrix} 9\varepsilon^2 u^2 v^2 (u^3+v^3) & -(1-\varepsilon) v^2 [(u^3 - \varepsilon v^3)(u^3 - \varepsilon^2 v^3) - 3\varepsilon(1-\varepsilon) u^3 (u^3+v^3)] \\ \varepsilon (u^3 - \varepsilon v^3)^2 & -\varepsilon u [2 v^3 (u^3 - \varepsilon^2 v^3) + (u^3+v^3)(u^3+2\varepsilon^2 v^3)] \end{vmatrix}. \quad (5,6)$$

Nun entnehme man der ersten (zweiten) Zeile den Malteil $\varepsilon^2 v^2$ (ε) und füge die mit u vervielfachte erste Spalte zur zweiten; dann erhält man

$$\Delta_1^* = v^2 \begin{vmatrix} 9u^2(u^3+v^3) & -\varepsilon(1-\varepsilon)(u^3 - \varepsilon v^3)(u^3 - \varepsilon^2 v^3) \\ (u^3 - \varepsilon v^3)^2 & -u v^3 (u^3 - \varepsilon^2 v^3) \end{vmatrix},$$

weil sich das rechte untere Eckglied zu

$$-u[u^6(1-1) + u^3 v^3 (3 + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon) + v^6 (-2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^2 - \varepsilon^2)],$$

also der eben vermerkten Gestalt vereinfacht. Da jetzt die zweite Spalte einen Malteil $u^3 - \varepsilon^2 v^3$ freigibt, wird nach (5, 6)

$$(u^3 - \varepsilon^2 v^3)^3 \Delta_1 = 3i\sqrt{3}\, v^2 [3\varepsilon(1-\varepsilon) u^3 v^3 (u^3+v^3) + (u^3 - \varepsilon v^3)^3]$$
$$= 3i\sqrt{3}\, v^2 (u^9 - 3\varepsilon^2 u^6 v^3 + 3\varepsilon u^3 v^6 - v^9) = 3i\sqrt{3}\, v^2 (u^3 - \varepsilon^2 v^3)^3,$$

also endgültig

$$\Delta_1 = 3i\sqrt{3}\, v^2, \quad (5,7)$$

und hiernach und nach (5, 5) bestätigt man in der Tat die Richtigkeit von (5, 31). Davon, daß auch (5,32) zutrifft, überzeugt man sich auf gleiche Weise, indem man Δ_2 wie eben Δ_1 ausrechnet, was hier unausgeführt bleibe; man findet, entsprechend (5, 7),

$$\Delta_2 = -3i\sqrt{3}\, u^2. \quad (5,8)$$

6. Jetzt soll das Wesen des Gestaltswandels (3, 1) erörtert werden. Es wird sich zeigen, daß er die *komplexe Multiplikation* der durch (2, 6) erklärten elliptischen Funktion $\varphi(s)$ *mit* ε — 1, einem Teiler der Drei

im Körper $K(\varepsilon)$, bedeutet[6,1]. Um das zu beweisen, greife man auf den Summensatz dieser Funktion[6,2] zurück, ersetze in ihm u, v durch s, t und wähle $t = -\varepsilon s$; vermöge der Gleichungen[6,3]

$$\varphi(-s) = \frac{1}{\varphi(s)}, \quad \varphi(\varepsilon s) = \varphi(s),$$

$$\psi(-s) = -\frac{\psi(s)}{\varphi(s)}, \quad \psi(\varepsilon s) = \varepsilon \psi(s), \quad \varphi(s)^3 + \psi(s)^3 = 1 \; {}^{6,4}$$

ergibt sich dann

$$\varphi[(1-\varepsilon)s] = \frac{\varphi(s)[\varphi(s)^2 - 1] - \varepsilon \psi(s)^3 [\varphi(s) + \varepsilon]}{\varphi(s)[\varphi(s)^2 - 1] - \varepsilon \psi(s)^3 [\varepsilon \varphi(s) + 1]}$$

$$= \frac{\varepsilon \varphi(s)^4 - \varepsilon \varphi(s)^3 + \varepsilon^2 \varphi(s) - \varepsilon^2}{\varepsilon^2 \varphi(s)^4 - \varepsilon^2 \varphi(s)^3 + \varepsilon \varphi(s) - \varepsilon}$$

oder nach Kürzung mit $\varepsilon[\varphi(s) - 1]$, weiter nach *A.*, (5)

$$\varphi[(1-\varepsilon)s] = \frac{\varphi(s)^3 + \varepsilon}{\varepsilon \varphi(s)^3 + 1}, \qquad \varphi[(\varepsilon - 1)s] = \frac{\varepsilon \varphi(s)^3 + 1}{\varphi(s)^3 + \varepsilon}. \quad (6,1)$$

Das ist aber bei Ersetzung von $\varphi(s)$ durch u gerade die durch Umkehrung von (3, 1) entstehende Formel

$$U = C \frac{\varepsilon u^3 + c^3}{u^3 + \varepsilon c^3} \quad (6,2)$$

in dem besonderen Falle $C = c = 1$, in dem der Ansatz

$$u = \left(\frac{1 - \varepsilon U}{U - \varepsilon}\right)^{1/3} \quad (6,3)$$

nach (3, 2), (3, 3) die Verwandlung

$$\frac{\sqrt{3}\, du}{(1-u^3)^{2/3}} = \frac{i \varepsilon\, dU}{(1-U^3)^{2/3}} \quad (6,4)$$

nach sich zieht. Anders ausgedrückt, man erhält (6, 2), wenn man in (6, 1) die linke Seite durch U/C, rechts $\varphi(s)$ durch u/c ersetzt.

6,1 Von der komplexen Multiplikation [der Funktion $\psi(u)$] wird später (in Nr. 12) noch die Rede sein, für eine allgemeine Klasse von Multiplikatoren μ, die, aus ganzen Zahlen von $K(\varepsilon)$ bestehend, allerdings die Teiler der Drei nicht enthält.

6,2 Vgl. *A.*, S. 282, (8).

6,3 Ebd. S. 281, (4), (5), (6).

6,4 Man lese $\varphi(s)^3 = [\varphi(s)]^3$ und entsprechend in ähnlichen Fällen.

7. Das Ergebnis der Nr. 6 legt die Frage nahe, was in Lemkes Entwicklungen der Übergang[7,1]

$$2\,u_1^2 = u^2 + \sqrt{u^4 - c^4}, \qquad (7,1) \qquad u^2 = u_1^2 + \frac{c^4}{4}\,u_1^{-2} \qquad (7,2)$$

der den Gestaltswandel

$$\frac{d\,u}{\sqrt{u^4 - c^4}} = \frac{d\,u_1}{\sqrt{u_1^4 + (c^4/4)}} \qquad (7,3)$$

bewirkt, für die hier auftretenden harmonischen, d. h. dem Modul $k = 1/\sqrt{2}$ zugehörigen elliptischen Funktionen bedeutet. Es ist, wie jetzt bewiesen werden soll, ihre *komplexe Multiplikation mit* $1 + i$, einem Teiler der Zwei in $K(i)$, — verbunden mit einer Änderung des Arguments um ein Periodenviertel. Man gehe von Lemkes Formel[7,2] aus, die die Beziehung

$$\frac{d\,u}{\sqrt{u^4 - c^4}} = d\,z \qquad \text{durch} \qquad u = \frac{c}{\operatorname{cn} c\sqrt{2}\,(z - z_0)} \qquad (7,4)$$

umkehrt, unter z_0 einen Festwert verstanden. Daher gehört zu

$$d\,z = \frac{d\,u_1}{\sqrt{u_1^4 + (c^4/4)}} \text{ die Umkehrung } u_1 = c\,\frac{1-i}{2}\,\frac{1}{\operatorname{cn}\{[c(1-i)/\sqrt{2}\,](z - z_1)\}} \qquad (7,5)$$

mit einem Festwerte z_1. Nun zeigt (7, 1), daß dem für $z = z_0$ sich ergebenden Werte $u = c$ der Wert $u_1 = c/\sqrt{2}$ entspricht; das gibt nach (7, 5)

$$\operatorname{cn}\{[c\,(1-i)/\sqrt{2}\,]\,(z_0 - z_1)\} = (1-i)/\sqrt{2}\,.$$

Da aber $(1-i)/\sqrt{2}$ der Wert von $\operatorname{cn}[(K + i\,K')/2]$ ist [7,3], so kann $[c\,(1-i)/\sqrt{2}\,]\,(z_0 - z_1) = (K + i\,K')/2 = K(1+i)/2$ gesetzt werden[7,4]; statt (7, 5) ergibt sich dann

$$u_1 = c\,\frac{1-i}{2}\,\frac{1}{\operatorname{cn}\{[c\,(1-i)/\sqrt{2}\,]\,(z - z_0) + (1+i)\,K/2\}}. \qquad (7,6)$$

Bezeichnet man hier das Argument der elliptischen Funktion mit w, so lassen sich (7, 4) und (7, 5) durch

---

7,1 Siehe [1,1], S. 30, (21).

7,2 Ebd. S. 27, (12).

7,3 Vgl. z. B. *F. Tricomi*, Funzioni ellittiche, Bologna 1937, S. 121. — Man beachte, daß im harmonischen Falle $K' = K$ ist.

7,4 Zum Unterschiede von der auf (3, 3) folgenden Bemerkung weicht also hier z_1 von z_0 ab.

$$u = \frac{c}{\operatorname{cn}[(1+i)\,w - i\,K']}, \quad (7,7) \qquad u_1 = c\,\frac{1-i}{2}\,\frac{1}{\operatorname{cn} w} \quad (7,8)$$

ersetzen. Nun ist[7,5]

$$\operatorname{cn}(v - i\,K') = \frac{i}{k}\,\frac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v}, \quad (7,9)$$

daher

$$u^2 = -\,\frac{c^2}{2}\,\frac{\operatorname{sn}^2(1+i)\,w}{\operatorname{dn}^2(1+i)\,w};$$

die Formeln der komplexen Multiplikation mit $1+i$ sind

$$\operatorname{cn}(1+i)\,w = -\,i\,\frac{1+i\operatorname{cn}^2 w}{1-i\operatorname{cn}^2 w},$$ [7,6]

$$\operatorname{sn}^2(1+i)\,w = 1 - \operatorname{cn}^2(1+i)\,w = \frac{2\,(1-\operatorname{cn}^4 w)}{(1-i\operatorname{cn}^2 w)^2} = \frac{4\operatorname{sn}^2 w\operatorname{dn}^2 w}{(1-i\operatorname{cn}^2 w)^2},$$

$$\operatorname{dn}^2(1+i)\,w = \frac{1}{2}\,[1+\operatorname{cn}^2(1+i)\,w] = \frac{-2\,i\operatorname{cn}^2 w}{(1-i\operatorname{cn}^2 w)^2},$$

mithin ergibt sich

$$u^2 = -\,i\,c^2\,\frac{\operatorname{sn}^2 w\operatorname{dn}^2 w}{\operatorname{cn}^2 w}.$$

Andererseits liefert (7, 8) auch

$$u_1^2 + \frac{c^4}{4}\,u_1^{-2} = -\,\frac{i}{2}\,c^2\,\frac{1}{\operatorname{cn}^2 w} + \frac{i}{2}\,c^2\operatorname{cn}^2 w = -\,i\,c^2\,\frac{\operatorname{sn}^2 w\operatorname{dn}^2 w,}{\operatorname{cn}^2 w},$$

so daß sich (7, 2), wie gewünscht, bestätigt.

7.1. Lemke vermerkt[7.1.1], daß $-(z-z_0)^{-1}$ ein rationales Integral der Differentialgleichung (1, 1) ist, und erkennt diese rationale Lösung als die Grenzfunktion einer Folge von Lösungen, die man erhält, wenn man c in (7, 4) durch $c_1 = c\,(1-i)/2$ mit $|c_1| = |c|/\sqrt{2}$ ersetzt, und immer so fort. Dazu sei bemerkt, daß aus der Darstellung (7, 4) das Ergebnis des Grenzüberganges $c \longrightarrow 0$ nicht ohne weiteres ersichtlich ist, es aber sofort wird, wenn man so vorgeht: Man läßt dort an die Stelle des Festwertes z_0 den andern $\zeta - (K/c\sqrt{2})$ treten; nach bekannter Formel[7.5] $\operatorname{cn}(v+K) = -\,k'\operatorname{sn} v/\operatorname{dn} v$ wird dann

---

[7,5] Vgl. *Tricomi* [7,3], S. 119.

[7,6] Vgl. *A. G. Greenhill*, The applications of elliptic functions, London 1892, S. 333.

[7.1.1] Siehe [1,1], S. 29, letzten Absatz.

$$u = \frac{c}{\mathrm{cn}\,[c\sqrt{2}\,(z-\zeta)+K]} = \frac{-c\sqrt{2}\,\mathrm{dn}\,c\sqrt{2}\,(z-\zeta)}{\mathrm{sn}\,c\sqrt{2}\,(z-\zeta)},$$

und nun bestätigt man bei nullstrebigem c in der Tat $u \longrightarrow -(z-\zeta)^{-1}$.

8. Auch in dem uns hier beschäftigenden äquianharmonischen Falle gibt es ein rationales Integral der maßgebenden Gleichung (2, 1), nämlich $U^*(z,\zeta) = u^* = -(z-\zeta)^{-1}$ mit festem ζ. Um es aus dem allgemeinen Integrale herzuleiten, schreibe man dieses nach (2, 7), die Gestalt des Festwertes z_0 abändernd, und nach A., (3)

$$U(z,\zeta;C) = C\varphi\left[-\frac{C}{\sqrt{3}}(z-\zeta) - \frac{2\omega}{3}\right] = C\,\frac{\wp'\left[(C/\sqrt{3})\,(z-\zeta)\right]+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\,\wp\left[(C/\sqrt{3})\,(z-\zeta)\right]}; \tag{8, 1}$$

an dieser Form von U kann man den Grenzübergang $C \longrightarrow 0$ vollziehen: Entwickelt man nahe bei $z = \zeta$ in geläufiger Weise[8, 1]

$$\wp\left[\frac{C}{\sqrt{3}}(z-\zeta)\right] = \frac{3}{C^2(z-\zeta)^2} + \frac{C^2}{3}(z-\zeta)^2\,\mathrm{P}_1\left[\frac{C}{\sqrt{3}}(z-\zeta)\right],$$

$$\wp'\left[\frac{C}{\sqrt{3}}(z-\zeta)\right] = \frac{-2\,.\,3\,.\sqrt{3}}{C^3(z-\zeta)^3} + \frac{C}{\sqrt{3}}(z-\zeta)\,\mathrm{P}_2\left[\frac{C}{\sqrt{3}}(z-\zeta)\right],$$

wo P_1, P_2 Potenzreihen der Größe $(C/\sqrt{3})\,(z-\zeta)$ bedeuten, so findet man

$$\lim_{C\to 0} U(z,\zeta;C) = \lim_{C\to 0} \frac{C}{2\sqrt{3}}\,\frac{-2\,.\,3\sqrt{3}}{C^3(z-\zeta)^3}\,\frac{C^2(z-\zeta)^2}{3} = -\frac{1}{z-\zeta}, \tag{8, 2}$$

also in der Tat $U^*(z,\zeta)$, kurz u^*.

Entsprechend (8, 1) ergibt sich nach (2, 8) und A., (3)

$$V(z,\zeta;C) = C\psi\left[-\frac{C}{\sqrt{3}}(z-\zeta) - \frac{2\omega}{3}\right] = \frac{C}{\varphi\left[-(C/\sqrt{3})\,(z-\zeta)+2\omega/3\right]}$$

$$= C\varphi\left[\frac{C}{\sqrt{3}}(z-\zeta) - \frac{2\omega}{3}\right] = -C\,\frac{\wp'\left[(C/\sqrt{3})\,(z-\zeta)\right]-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\,\wp\left[(C/\sqrt{3})\,(z-\zeta)\right]}, \tag{8, 3}$$

und hieraus folgt durch eine Überlegung, die der an (8, 1) geknüpften völlig gleichläuft, daß

$$\lim_{C\to 0} V(z,\zeta;C) = \frac{1}{z-\zeta} \equiv V^*(z,\zeta) = v^*. \tag{8, 4}$$

8,1 Vgl. *Tricomi* [7,3], S. 33.

Man bestätigt u^* und die soeben mit v^* bezeichnete Funktion sogleich als Lösungen des Gefüges (1, 5).

9. Ich greife auf die am Ende der Nr. 3 genannte besondere Folge von Übergängen (3, 1) zurück, bei der $U=u_0$ sich in $u=u_1$, u_1 sich in u_2 verwandelt usw., wenn man von $C = c_0$ zu $c_1 = (i\,\varepsilon/\sqrt{3})\,c_0$, von c_1 zu $c_2 = (i\,\varepsilon/\sqrt{3})\,c_1$ fortschreitet usw. Die Größe $c_{6n} = (i\,\varepsilon/\sqrt{3})^{6n}\,c_0 = = (-1/3)^{3n}\,c_0$ ist mit c_0 reell. Sind daher z und der — nach der an (3, 3) geknüpften Bemerkung — bei dem Wechsel (3, 1) sich gleichbleibende Wert z_0 reell, so sind es, wie im Anschluß an (2, 7), (2, 8) festgestellt, auch die nach diesen Formeln gebildeten Glieder u_{6n}, v_{6n} der Folge. Es gibt demnach in ihr [9,1] gewiß eine Teilfolge *reeller* Funktionen u_{6n}, v_{6n}; sie befriedigen nach (4, 7) die Beziehung

$$u_{6n}{}^3 + v_{6n}{}^3 = \left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^{18n}(u_0{}^3 + v_0{}^3) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{9n}(u_0{}^3 + v_0{}^3)$$

aus der man beim Grenzübergang $n \longrightarrow \infty$ mit den Zeichen der Nr. 8 herleitet, daß

$$u^{*3} + v^{*3} = (u^* + v^*)\,(u^{*2} - u^*\,v^* + v^{*2}) = 0$$

ist. Daraus folgt das Verschwinden des ersten Malteils, so daß sich $u^* = -v^*$ ergibt im Einklange mit (8, 2) und (8, 4). — Man kann u_{6n}, v_{6n} als die rechtwinkeligen Koordinaten eines Punktes W_{6n} einer (u, v)-Ebene deuten; W_{6n} entsteht aus $W_{6\,(n-1)}$ durch 6-maligen Übergang (3, 1), (3, 4). Die Reihe der Punkte W_{6n} strebt einem Punkte der Geraden $u + v = 0$ zu.

10. Da die vorliegende Arbeit eine Funktion betrifft, die ich a. a. O.[1,5] in der Zahlentheorie benutzen konnte, sei es mir gestattet, die dortigen Anmerkungen durch einige *geschichtliche Zusätze* zu ergänzen, die sich auf den Gebrauch äquianharmonischer Funktionen zum Beweise des Reziprozitätsgesetzes der kubischen Reste beziehen. Mir selbst war 1921 eine Abhandlung darüber aus neuerer Zeit von Lewandowski[10,1] entgangen; man findet in ihr eine Fülle weiteren Schrifttums angegeben, das ich hier nicht von neuem aufzähle. Der Verfasser hat dann in einer zweiten Arbeit[10,2] auch das Reziprozitätsgesetz der neunten Potenzreste mit der genannten $\wp$-Funktion behandelt. — Den Hinweis auf die Abhandlungen von Lewandowski verdanke ich einer Arbeit von

---

[9,1] Ich gehe hier nicht auf *alle* ihre Mitglieder ein.

[10,1] *J. F. Lewandowski*, Mh. Math. Phys. 21 (1910), 155—171.

[10,2] *Lewandowski*, Jahresber. des Kaiser-Franz-Josef-Landesreal- und Obergymnasiums in Baden bei Wien, 47 (1910), 12 S.

Kantz[10,3]. — Noch später hat sich Petr mit dem Gegenstande befaßt[10,4] und das Reziprozitätsgesetz der sechsten Potenzreste mit der σ-Funktion des äquianharmonischen Falles bewiesen. Von Vorgängern erwähnt er nur den Urheber dieser Beweisart, Eisenstein[10,5]. Für mich nehme ich in Anspruch, die Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ [(2, 7), (2, 8)] in die Zahlentheorie eingeführt zu haben, von denen $\psi(u)$ das vollkommene Seitenstück der von Eisenstein beim biquadratischen Reziprozitätsgesetz verwendeten Funktion ist. Auf dieses Gesetz geht auch Petr[10,6] ein und leitet die komplexe Multiplikation der Eisensteinschen Funktion $\varphi(u)$[10,7] her, indem er sich der $\wp$-Funktion des *harmonischen* Falles bedient. Auch ich hatte diese $\wp$-Funktion in einer von Petr nicht angeführten Arbeit herangezogen[10,8]; diese weist den von Petr vermiedenen Schönheitsfehler auf, daß ohne Not eine Quadratwurzel ausgezogen wird, weil ich die Formel, auf die es ankommt, erst für die $\wp$-Funktion aufstelle. Die Möglichkeit, diesen Mangel zu beheben, bemerkte ich in Übungen, die H. Kneser, K. Reinhardt und ich im Winter 1926/27 an der Universität Greifswald hielten, und ich gebe in Nr. 11 die verbesserte Herleitung des erwähnten Ergebnisses, die sich der Funktion $\varphi(u)$ als Mittel der Darstellung bedient.

11. Es handelt sich um den Fall, in dem der $\wp$-Funktion die Invarianten $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ zukommen; dabei ist $e_1 = -e_3 = 1$, $e_2 = 0$, $\omega' = i\,\omega$. Man arbeite, wie gesagt, nicht mit $\wp\,u$ selbst, sondern mit der Funktion[10,7]

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{\wp u}} = \frac{1}{\sqrt{\wp u - e_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\operatorname{sn}(u\sqrt{2})}{\operatorname{dn}(u\sqrt{2})} = \operatorname{cn}(K - u\sqrt{2}) \quad (11, 1)$$

— in den bei den elliptischen Funktionen üblichen Zeichen. $\varphi(u)$ hat die Perioden $4\,\omega$ und $4\,i\,\omega$; sie erfreut sich der Eigenschaft $\varphi(i\,u) = i\,\varphi(u)$. Man betrachte die Funktion $\Phi(u) = \varphi(\mu\,u)/\varphi(u)$, wo $\mu = a + b\,i$ eine ganze ungerade primäre[11,1] Zahl des Körpers $K(i)$ ist. Doppeltperiodisch mit den Perioden $2\,\omega$, $2\,i\,\omega$. besitzt sie

10,3 *G. Kantz*, Comment. math. Helvetici 2 (1929), 116—127.

10,4 *K. Petr*, C. R. Premier Congrès des mathématiciens des Pays Slaves, Warszawa 1929, 119—128.

10,5 *G. Eisenstein*, Mathematische Abhandlungen, Berlin 1847, 121—150, 213—334.

10,6 A. a. O. 10,4, S. 119—123.

10,7 Sie weicht natürlich von (2,6) und der (erwähnten σ-) Funktion ab, die Petr 10,4 von S. 126 an mit dem Namen φ benutzt.

10,8 *L. Koschmieder*, Jahresber. Deutsche Math.-Verein. 30 (1921), 122—125.

11,1 Das bedeutet, daß für die reellen ganzen a und b entweder $a \equiv 1$, $b \equiv 0$ oder $a \equiv 3$, $b \equiv 2$ (mod. 4) gilt. — μ war in 10,8 mit m bezeichnet.

die Nullstellen $v = 2\,\nu\,\omega/\mu$, die Pole $w = (2\,N + 1 + i)\,\omega/\mu$, wo $\nu = q + r\,i$, $N = Q + R\,i$ ist mit reellen ganzen q, r, Q, R; es ist nämlich

$$\wp(\mu\,v) = \infty,\ \wp(\mu\,w) = \wp[(1+i)\,\omega] = \wp(\omega + \omega') = e_2 = 0.$$

Die einem Periodenquadrat enthaltenen Punkte v und w ergeben sich, wenn die Zahlen ν und N ein volles Restsystem (mod. μ) durchlaufen. Auszunehmen ist dabei für die Nullstellen die Nullklasse $q = r = 0$, für die Pole die Klasse $Q = (a - b - 1)/2$, $R = (a + b - 1)/2$; denn für $\hat{v} = 0$ ist

$$\Phi(\hat{v}) = \mu, \text{ und für } \underset{\smile}{w} = [\bar{a} - b + (a+b)\,i]\,\omega/\mu = (1+i)\,\omega$$

ist $\mu\,w \equiv \underset{\smile}{w}$, — das Zeichen der Kongruenz hier und weiterhin, in bezug auf die Perioden verstanden, $\Phi(\underset{\smile}{w}) = 1/\mu$. — Man kann aber leicht noch eine zweite doppeltperiodische Funktion mit denselben Perioden, Nullstellen und Polen, wie $\Phi(u)$ sie besitzt, rational aus $\varphi(u)$ aufbauen; dazu bedient man sich der a. a. O.[10,8] auf S. 123/4 angestellten Überlegung. Die Nullstellen v besitzt der Malwert $Z[\varphi(u)] = \Pi[\varphi(u) - \varphi(v)]$, erstreckt über die oben genannte Restgesamtheit M, also über $m - 1$ Malteile, wenn m die Norm von μ bedeutet. Nun lassen sich aber die Mitglieder von M in Gruppen zu je vieren von der Gestalt $\varrho, i\,\varrho, -\varrho, -i\,\varrho$ zusammenfassen, denen — jetzt mit $v = 2\,\varrho\,\omega/\mu$ — die Werte

$$\varphi(v),\ \varphi(i\,v) = i\,\varphi(v),\ \ \varphi(-v) = -\varphi(v),\ \ \varphi(-i\,v) = -i\,\varphi(v)$$

entsprechen; daher erscheinen in Z jeweils Vierheiten von Malwerten, nämlich

$$[\varphi(u) - \varphi(v)]\,[\varphi(u) - \varphi(i\,v)]\,[\varphi(u) - \varphi(-v)]\,[\varphi(u) - \varphi(-iv)] = \varphi(u)^4 - \varphi(v)^4,$$

und Z verwandelt sich in

$$Z[\varphi(u)] = \Pi[\varphi(u)^4 - \varphi(v)^4],$$

wo nun über ein Viertelrestsystem (mod. μ) zu vervielfachen ist. – Die Pole w von $\Phi(u)$ kommen als Nullstellen dem Malwerte $N[\varphi(u)] = \Pi\varphi[(u) - \varphi(w)]$ zu. Nun besteht aber zwischen ihnen und den Werten v die Beziehung[11,2] $w = v - (1+i)\,\omega$. Den Nullstellen $v, v_1 = i\,v, v_2 = -v, v_3 = -i\,v$ entsprechen demnach die Pole w, $w_1 = iv - (1+i)\,\omega \equiv iw$, $w_2 \equiv -w$, $w_3 \equiv -iw$. Folglich hat $N[\varphi(u)]$ die Gestalt

---

[11,2] Leicht zu bestätigen; a. a. O.[10,8] im Gefolge der dortigen Formel (8) gezeigt.

$$\Pi\,[\varphi(u)-\varphi(w)]\,[\varphi(u)-\varphi(iw)]\,[\varphi(u)-\varphi(-w)]\,[\varphi(u)-\varphi(-iw)]$$
$$=\Pi\,[\varphi(u)^4-\varphi(w)^4],$$

wo über die Pole $(2\,\varrho\,\omega/\mu)-(1+i)\,\omega$ zu vervielfachen ist. Der zu w gehörige Funktionswert ist nach der letzten der Gestalten (11, 1) von $\varphi(u)$ und nach (7, 9)

$$\varphi(w)=\varphi(v-\omega-\omega')=\operatorname{cn}(2K+iK'-v\sqrt{2})=-\operatorname{cn}(v\sqrt{2}-iK')$$
$$=-i\sqrt{2}\,\frac{\operatorname{dn} v\sqrt{2}}{\operatorname{sn} v\sqrt{2}},\ \text{also}\ \varphi(w)=-\frac{i}{\varphi(v)}.$$

Daher wird

$$N\,[\varphi(u)]=\Pi\,[\varphi(u)^4-\varphi(v)^{-4}],$$

und jetzt hat man in $Z\,[\varphi(u)]/\,N\,[\varphi(u)]$ eine Funktion mit den Perioden $2\,\omega$, $2\,i\,\omega$ vor sich, die mit $\Phi(u)$ die Nullstellen v und die Pole w gemein hat. Nach dem ersten der vier Sätze J. Liouvilles muß daher das Verhältnis von Φ und Z/N einen festen Wert haben, also

$$\frac{\varphi(\mu\,u)}{\varphi(u)}=C\,\Pi\,\frac{\varphi(u)^4-\varphi(v)^4}{1-\varphi(u)^4\,\varphi(v)^4}$$

sein, wo C eine feste Größe bedeutet. Um sie zu bestimmen, setzt man $u=\omega$, so daß $\varphi(u)=1$, $\varphi(\mu\,u)=\varphi[(a+b\,i)\,\omega]=\varphi(\omega)=1$ wird[11,1]; das gibt $C=1$, und man findet endgültig

$$\varphi(\mu\,u)=\varphi(u)\,\Pi\,\frac{\varphi(u)^4-\varphi(v)^4}{1-\varphi(u)^4\,\varphi(v)^4},\quad v=\frac{2\,\varrho\,\omega}{\mu}.$$

Mit diesem Ergebnisse schloß meine Mitteilung[10,8]; nach einer dort noch an sie geknüpften Bemerkung kommt es mit Eisensteins ursprünglicher Formel überein.

12. Zum *äquianharmonischen* Falle $g_2=0$, $g_3=1$ zurückkehrend, will ich zum Schluß entsprechend zeigen, daß sich auch die Formel A., (13) der komplexen Multiplikation der Funktion $\psi(u)$[6,1] kürzer herleiten läßt, als ich sie a. a. O. gewann. Die dort zuvor behandelte Funktion $\varphi(u)$ lasse ich hier beiseite und wende mich sogleich zu der einen Beweis des kubischen Reziprozitätsgesetzes liefernden Funktion (2, 8) [vgl. A., (3)]

$$\psi(u)=\frac{\wp'[u-(2\,\omega/3)]-\sqrt{3}}{\wp'[u-(2\,\omega/3)]+\sqrt{3}}\qquad(12,1)$$

mit den bei (2, 6) vermerkten Hauptperioden $2\,\omega$ und $2\,\varepsilon\,\omega$. Weil $\wp'(\pm\,2\,\omega/3)=\mp\sqrt{3}$, sind ihre Nullstellen die Werte $u=2\,\nu\,\omega$, wo

$\nu = q + r\,\varepsilon$ mit reellen ganzen q und r, also eine ganze Zahl des Körpers $K(\varepsilon)$ ist, und ihre Pole die Werte $u = (-2\,\omega/3) + 2\,N\,\omega$, wo $N = Q + R\,\varepsilon$ mit gleichartigem Sinne der Zeichen. Man fasse, unter μ eine *ausgezeichnete* ganze Zahl des $K(\varepsilon)$, d. h. eine solche der Form $3\,g + 1 + 3\,h\,\varepsilon$ mit reellen ganzen g und h verstehend, die Funktion $\Psi(u) = \psi(\mu\,u)/\psi(u)$ ins Auge. Sie besitzt die Perioden $2\,\omega$, $2\,\varepsilon\,\omega$ und hat

die Nullstellen $v = 2\,\nu\,\omega/\mu$, die Pole $w = [-(2\,\omega/3) + 2\,N\,\omega]/\mu$, (12, 2)

worin ν, N ein volles Restsystem (mod. μ) durchlaufen. Für ν ist dabei die Nullklasse, für N die Klasse $-g - h\,\varepsilon$ auszunehmen; denn bei den zugehörigen Werten $\hat{v} = 0$, $\check{w} = [-(2\omega/3) - 2(g + h\varepsilon)\omega]/\mu = -(2\omega/3)$ ist $\Psi(\hat{v}) = \mu$, ferner $\mu\,\check{w} \equiv \check{w}$, $\Psi(\check{w}) = 1/\mu$. Zwischen Nullstellen und Polen waltet nach (12, 2) die Beziehung ob

$$w = -v - \frac{2\,\omega}{3}\,. \tag{12, 3}$$

Man bildet jetzt rational aus $\psi(u)$ eine zweite Funktion mit den Perioden $2\,\omega$, $2\,\varepsilon\,\omega$, den Nullstellen v und den Polen w. Eine solche ist der Bruch $Z[\psi(u)]/N[\psi(u)]$, wo

$$Z[\psi(u)] = \Pi(\psi(u) - \psi(v)],\quad N[\psi(u)] = \Pi[\psi(u) - \psi(w)]$$

ist und in Z über die aufgezählten Werte v vervielfacht wird, in N über die ihnen nach (12, 3) zugehörigen w; beidemal sind das $m - 1$ Malteile, wenn m die Norm von μ ist. Hier kann man die Mitglieder der obigen Restgesamtheit in Gruppen zu je dreien von der Gestalt ϱ, $\varepsilon\,\varrho$, $\varepsilon^2\,\varrho$ anordnen, denen nach A., (6) die Werte $\psi(v)$, $\psi(\varepsilon\,v) = \varepsilon\,\psi(v)$, $\psi(\varepsilon^2\,v) = \varepsilon^2\,\psi(v)$ entsprechen; daher ist

$$Z[\psi(u)] = \Pi[\psi(u) - \psi(v)]\,[\psi(u) - \psi(\varepsilon\,v)]\,[\psi(u) - \psi(\varepsilon^2 v)],$$
$$Z[\psi(u)] = \Pi[\psi(u)^3 - \psi(v)^3], \tag{12, 4}$$

wo man zuletzt über ein Drittelrestsystem (mod. μ) zu vervielfachen hat. — Was N angeht, so entsprechen den Nullstellen v, $v_1 = \varepsilon\,v$, $v_2 = \varepsilon^2\,v$ nach (12, 3) die Pole

$$w = -v - \frac{2\omega}{3},\ w_1 = -\varepsilon\,v - \frac{2\omega}{3},\ w_2 = -\varepsilon^2 v - \frac{2\omega}{3}. \tag{12, 5}$$

Nun gilt nach B., (4) die Formel

$$\psi\left(-u - \frac{2\omega}{3}\right) = \frac{1}{\psi(u)}\,, \tag{12, 6}$$

also gesellen sich den Werten $\psi(v)$, $\psi(\varepsilon v)$, $\psi(\varepsilon^2 v)$ die anderen zu

$$\psi(w) = \psi(v)^{-1},\ \psi(w_1) = \psi\left(-\varepsilon v - \frac{2\omega}{3}\right) = \psi(\varepsilon v)^{-1} = \varepsilon^2 \psi(w),$$

$$\psi(w_2) = \varepsilon \psi(w), \tag{12, 7}$$

und es wird — mit dem Sinne (12, 4) des Zeichens Π —

$$N[\psi(u)] = \Pi[\psi(u)^3 - \psi(v)^{-3}]. — \tag{12, 8}$$

Folgende Zwischenbemerkung macht die Lage der Pole noch deutlicher: Im harmonischen Falle der Nr. 11 waren, wenn w einen Pol bezeichnete, $w_1 = i w$, $w_2 = -w$, $w_3 = -i w$ die übrigen. Hier finden sich w und nach (12, 5)

$$w_1 = \varepsilon w - \frac{2\omega}{3}(1 - \varepsilon),\quad w_2 = \varepsilon^2 w - \frac{2\omega}{3}(1 - \varepsilon^2) \tag{12, 9}$$

zu einer Poldreiheit. Auch von ihr aus bestätigt man (12, 7) leicht als richtig: Auf Grund von (12, 1) und mittels der Gleichungen $\wp'(\varepsilon u) = \wp'(\varepsilon^2 u) = \wp'(u)$ gewinnt man die Beziehungen

$$\psi\left[\varepsilon u + \frac{2\omega}{3}(1 - \varepsilon)\right] = \psi\left[\varepsilon^2 u + \frac{2\omega}{3}(1 - \varepsilon^2)\right] = \psi(u),$$

das Seitenstück zu A., (7). Sie führen nach (12, 9) durch die Rechnung

$$\psi(\varepsilon w) = \varepsilon \psi(w) = \psi\left[\varepsilon\ (\varepsilon^2 w_1) + \frac{2\omega}{3}\ (1 - \varepsilon)\right] = \psi(\varepsilon^2 w_1) = \varepsilon^2 \psi(w_1)$$

zu den Werten $\psi(w_1) = \varepsilon^2 \psi(w)$ und ebenso $\psi(w_2) = \varepsilon \psi(w)$, d. h. zu (12, 7).

Mit den Gestalten (12, 4), (12, 8) des Zählers und Nenners von $\Psi(u)$ kann man nach Liouville

$$\frac{\psi(\mu u)}{\psi(u)} = C\,\Pi\,\frac{\psi(u)^3 - \psi(v)^3}{1 - \psi(u)^3 \psi(v)^3}$$

setzen. Den Festwert C bestimmt man durch den Ansatz $u = 2\omega/3$; er liefert, weil $\psi(2\omega/3)$ nach A., (3) gleich $1/\varphi(0) = 1$ ist und

$$\mu u = (3g + 1 + 3h\varepsilon)\frac{2\omega}{3} \equiv \frac{2\omega}{3}$$

wird, $C = 1$. Somit ergibt sich endgültig

$$\psi(\mu u) = \psi(u)\,\Pi\,\frac{\psi(u)^3 - \psi(v)^3}{1 - \psi(u)^3 \psi(v)^3},\qquad v = \frac{2\varrho\omega}{\mu}$$

— die gewünschte Formel A., (13). — Mit vorstehender Verkürzung läßt sich mein a. a. O. auf fünf Seiten geführter Beweis des kubischen Reziprozitätsgesetzes zu ihrer drei zusammendrängen.

Zusatz vor der Druckprobe.

Die vorstehende Abhandlung hatte ich der Schriftleitung dieser Monatshefte am 19. X. 49 von Aleppo aus eingereicht. Ende Jänner 1950 wurde ich hier in Tucumán durch die Besprechung in Math. Reviews **10** (1949), 38 auf die Arbeit von *R. Grammel*, „Eine Verallgemeinerung der Kreis- und Hyperbelfunktionen" (Ingenieur-Arch. **16** (1948), 188 bis 200), aufmerksam, konnte sie dann auch selbst einsehen und möchte kurz die Beziehung angeben, in der Teile des Inhalts meiner Arbeit K zum Gegenstande der Abhandlung G von Grammel stehen. Die Funktionen φ, ψ (K, (2,6), (2,7)) sind Sonderfälle der allgemeinen Grammelschen Cos (n) v, Sin (n) v, und zwar mit dem Werte $n = 3$. Auch Grammel erwähnt (in G, (22)) die Ausdrückbarkeit von Cos (3) v, Sin (3) v durch elliptische Funktionen, aber nicht die Stellen, an denen diese Umkehrungen des Integrals $\int (1 - x^3)^{-2/3}\, dx$ im Schrifttum schon vorkommen. Solche Fundorte habe ich in K und meinen dort in [1,5], [1,6] angeführten früheren Arbeiten angegeben (für die Funktionen Cos (4)v, Sin (4) v, die sich in G, (23) ebenfalls durch elliptische Funktionen dargestellt finden, sind mir entsprechende Schrifttumsnachweise im Augenblicke nicht zur Hand).

Grammel vermerkt in G, 1. c) das Gefüge von Differentialgleichungen $dx/dt = y^p$, $dy/dt = -x^p$ und bei ungeradem p seine Lösung durch die ein geschlossenes Polarisationsbild liefernden Funktionen $x = \mathrm{Cos}\,(p+1)\,t$, $y = \mathrm{Sin}\,(p+1)\,t$; er erwähnt die entsprechende Lösbarkeit des Gefüges $dx/dt = y^p$, $dy/dt = x^p$ durch verallgemeinerte Hyperbelfunktionen. Ich habe in K den Fall des geraden $p = 2$ ausführlich behandelt. Der Kern des analytischen Teils meiner Ausführungen ist nicht in der auf der Hand liegenden Lösung des Gefüges (1,6) durch (2,6), (2,7) zu suchen, sondern in den Nummern 3 bis 9, in denen ich die Verwandlung (3,1), (3,4) benutze, um das Gefüge (1,6) in sich überzuführen. (3,1) läßt sich als komplexe Multiplikation deuten, — als eine Eigentümlichkeit, die Grammel nur streift, indem er in G, (82), (83) rein imaginäre Werte der Unabhängigen betrachtet.

Der zahlentheoretische Teil meiner Arbeit (Nr. 10 bis 12) steht für sich. Er erhärtet Grammels einleitende Bemerkung, daß es —

außer technischen und physikalischen — auch mathematische Fragestellungen gebe, die zu seinen Verallgemeinerungen der Kreis- und Hyperbelfunktionen führen.

Universidad Nacional de Tucumán, Rep. Argentina Instituto de Matemática, 12. II. 1950.

L. Koschmieder.

Über bedingt konvergente Vektorreihen im Banach'schen Raum.

Von
Karl Prachar, Wien.

(Eingelangt am 2. März 1950.)

Einleitung.

In dieser Arbeit betrachten wir Reihen Σa_n von folgender Form

$$|a_n| \longrightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty,$$

wobei die a_n-Elemente aus einem Banach'schen Raum E sein sollen und $|a_n|$ die Norm von a_n bedeutet. Unter $\mathfrak{M}$ wird im folgenden eine Menge von orthogonalen Transformationen, meist Drehungen, des Raumes E in sich verstanden. Wenn $a \subset E$ und $M \subset \mathfrak{M}$, dann sei Ma das aus a durch die Transformation M hervorgegangene Element. Dann studieren wir die folgende Frage: Wann kann man die $M_i \subset \mathfrak{M}$ so wählen, daß die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} M_i a_i$$

gegen einen beliebigen Punkt von E konvergent wird. Im folgenden sollen darüber eine Reihe von Sätzen abgeleitet werden.

In 1. stellen wir einige Tatsachen aus der Geometrie des Banach'schen Raumes zusammen, die im folgenden benötigt werden. In 2. zeigen wir, daß, wenn die Menge $\mathfrak{M}$ der Drehungen eine gewisse Bedingung erfüllt, die Reihe gegen jeden Punkt aus E konvergent gemacht werden kann. In 3. zeigen wir dasselbe unter einer gewissen Beschränkung der Reihenfolge der M_i. Bei manchen Sätzen beschränken wir uns auf den Fall, daß $\mathfrak{M}$ eine endliche Gruppe ist (4. 5. 6.) sowie auf den Fall, daß E der euklidischen R_n ist (5. 6.). Im R_n betrachten wir speziell den Fall, daß $\mathfrak{M}$ die Gruppe der Drehungen eines regulären Simplexes in sich ist (5. 6.).

In diesem Fall leiten wir gewisse, für die Konvergenz von $\Sigma M_i a_i$ notwendige Bedingungen über die Verteilung der M_i her, die zu Sätzen von *Rademacher* (siehe Literaturverzeichnis) analog sind. In dem Falle, daß $\mathfrak{M}$ nur die Multiplikationen mit ± 1 enthält, kann die Reihe $\Sigma M_i a_i$ im allgemeinen nicht gegen jeden Punkt von E konvergent gemacht werden. Für eine sehr weite Klasse von Reihen (8.) beweisen wir, daß dies dennoch möglich ist.

Für weitere Einzelheiten verweisen wir auf den genauen Wortlaut der einzelnen Sätze.

1.

In diesem Abschnitt stellen wir einige Eigenschaften des Banach'schen Raumes zusammen, die wir für später brauchen.

Ein *Banach*'scher Raum E ist eine Menge, die folgenden Axiomen genügt[1]:

I. E ist ein linearer Vektorraum, d. h. für die Elemente aus E ist eine Multiplikation mit reellen Zahlen und eine Addition erklärt, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. $x + y = y + x$, 2. $x + (y + z) = (x + y) + z$,

3. $x + z = y + z$ impliziert $x = y$, 4. $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$,

5. $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$, 6. $1 . x = x$.

Aus diesen Axiomen folgt: Es gibt ein und nur ein $o \subset E$ mit

$$x + o = o + x = x \text{ für alle } x \subset E.$$

II. E ist ein normierter Raum, d. h. zu jedem $x \subset E$ gibt es eine nichtnegative reelle Zahl $| x |$ für die gilt

1. $| o | = O$ und $| x | > O$ für $x \neq o$

2. $| x + y | \leqq | x | + | y |$

3. $| \lambda x | = | \lambda | \; | x |$ für alle λ.

III. E ist vollständig.

Nun seien x und a beide $\neq o$. Wir zeigen:

1. *Es existiert*

$$\operatorname*{Min}_{\lambda \geqq 0} | a - \lambda x | = \mu (x).$$

$| a - \lambda x |$ ist eine stetige Funktion von λ und es gilt

[1] Für dieses Axiomensystem siehe *St. Banach*, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932. Elemente aus E werden mit kleinen lateinischen Buchstaben, reelle Zahlen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet (O = Null).

$$\lim_{\lambda \to \infty} | a - \lambda x | \lambda^{-1} = | x | > O, \tag{1}$$

also wird das Infimum der betrachteten Funktion von λ bereits in einem endlichen abgeschlossenen Intervall etwa in $O \leqq \lambda \leqq \lambda_1$ dasselbe sein, wie das Infimum in $O \leqq \lambda < \infty$. In einem solchen Intervall nimmt aber eine stetige Funktion ihr Infimum an. Weiter gilt

2. *Die Stellen $\lambda = \lambda(x)$ für die das Minimum angenommen wird,, erfüllen ein abgeschlossenes Intervall der reellen Achse.* Wegen (1) ist die Menge dieser λ jedenfalls beschränkt. Ist nun

$$| a - \lambda x | \geqq \mu \text{ für alle } \lambda \geqq O \text{ und} \tag{2}$$

$$| a - \lambda_1 x | = \mu, \quad | a - \lambda_2 x | = \mu, \tag{3}$$

dann ist auch

$$| a - (\lambda_1 \sigma + \lambda_2 (1-\sigma)) x | = \mu \text{ für } O \leqq \sigma \leqq 1, \tag{4}$$

weil wegen der Dreiecksungleichung II. 2.

$$| a - (\lambda_1 \sigma + \lambda_2 (1-\sigma)) x | = | \sigma (a - \lambda_1 x) + (1-\sigma)(a - \lambda_2 x) | \leqq$$
$$\leqq \sigma | a - \lambda_1 x | + (1-\sigma) | a - \lambda_2 x | = \mu$$

und wegen (2)

$$| a - (\lambda_1 \sigma + \lambda_2 (1-\sigma)) x | \geqq \mu$$

Da die betrachtete Menge außerdem abgeschlossen ist, folgt, wie behauptet, die Existenz zweier nichtnegativer Zahlen $\underline{\lambda}(x)$ und $\overline{\lambda}(x)$ mit $| a - \lambda x | = \mu$ dann und nur dann, wenn $\underline{\lambda}(x) \leqq \lambda \leqq \overline{\lambda}(x)$.
Wie bereits bemerkt, ist $\overline{\lambda}(x)$ immer endlich. Nun zeigen wir

3. *Für $\overline{\lambda} \leqq \lambda_1 < \lambda_2$ ist immer*

$$| a - \lambda_2 x | > | a - \lambda_1 x |.$$

Sei $\lambda_1 = \sigma \overline{\lambda} + (1-\sigma) \lambda_2$, $O < \sigma \leqq 1$, dann folgt ähnlich wie in 2.

$$| a - \lambda_1 x | \leqq \sigma | a - \overline{\lambda} x | + (1-\sigma) | a - \lambda_2 x | < | a - \lambda_2 x |.$$

Ebenso beweist man, daß $| a - \lambda x |$ für $O \leqq \lambda \leqq \underline{\lambda}$ im eigentlichen Sinne monoton abnimmt. Nun beweisen wir

4. *$\overline{\lambda}(x)$, bzw. $\underline{\lambda}(x)$ ist eine oberhalb, bzw. unterhalb stetige Funktion von x.*

Beweis: Die Menge λx mit $\underline{\lambda}(x) \leqq \lambda \leqq \overline{\lambda}(x)$ ist abgeschlossen. Wegen der Stetigkeit der Funktion $| a - y |$ in der Variablen y kann man zu jedem $\varepsilon_1 > O$ ein δ so finden, daß für jeden Punkt y aus der δ-Umgebung $\mathfrak{U}_\delta$ dieser Menge (δ-Umgebung einer Menge sei die Vereinigung aller offenen Kugeln vom Radius δ um die Punkte der Menge) gilt

$$\mu - \varepsilon_1 < |a - y| < \mu + \varepsilon_1 \qquad y \subset \mathfrak{B}_\delta \tag{5}$$

Weiter ist für alle $\varepsilon > O$

$$\vartheta = |a - (\bar{\lambda} + \varepsilon)\, x| > |a - \bar{\lambda}\, x| = \mu$$

nach der Definition von $\bar{\lambda}$. Wenn $\varepsilon > O$ gegeben ist, wählen wir $2\,\varepsilon_1 < \vartheta - \mu$ und δ so, daß (5) mit diesem ε_1 erfüllt ist. Weiter bestimmen wir, δ_1 so, daß für alle Punkte z der offenen Kugel U_{δ_1} mit Radius δ_1 um $(\bar{\lambda} + \varepsilon)\, x$ gilt

$$\vartheta - \varepsilon_1 < |a - z| < \vartheta + \varepsilon_1, \qquad z \subset U_{\delta_1}. \tag{6}$$

Wenn nicht schon von selbst $\delta_1\, \bar{\lambda} \leqq \delta\, (\bar{\lambda} + \varepsilon)$ ist, so verkleinern wir δ_1 soweit, bis dies der Fall ist. Für alle Punkte p aus einer Kugel $\overline{U}\,(x)$ mit Mittelpunkt x und dem Radius $(\bar{\lambda} + \varepsilon)^{-1}\, \delta_1$ gehört dann $\bar{\lambda}\, p$ zu $\mathfrak{B}_\delta$ und $(\bar{\lambda} + \varepsilon)\, p$ zu U_{δ_1}, so daß nach (5) und (6)

$$|a - \bar{\lambda}\, p| < \mu + \varepsilon_1$$
$$|a - (\bar{\lambda} + \varepsilon)\, p| > \vartheta - \varepsilon_1$$

also wegen $2\,\varepsilon_1 < \vartheta - \mu$

$$|a - (\bar{\lambda} + \varepsilon)\, p| > |a - \bar{\lambda}\, p|, \quad p \subset \overline{U}\,(x). \tag{7}$$

Ebenso zeigt man, daß eine Kugel $\underline{U}\,(x)$ existiert mit

$$|a - (\underline{\lambda} - \varepsilon)\, p| > |a - \underline{\lambda}\, p|, \quad p \subset \underline{U}\,(x). \tag{7'}$$

Für $p \subset \overline{U} \cap \underline{U}$ gilt sowohl (7) als auch (7'). Zusammen mit dem, was oben über $|a - \lambda\, p|$ als Funktion von λ gesagt wurde, folgt für diese p

$$\underline{\lambda} - \varepsilon < \underline{\lambda}\,(p) \leqq \bar{\lambda}\,(p) < \bar{\lambda} + \varepsilon$$

und damit ist alles bewiesen.

ϱ soll nun eine Zahl sein, für die $O < \varrho < 1$. Folgende Menge $\mathfrak{K}\,\varrho\,(a)$ soll ein „Kegel mit der Achse a" heißen $(a \neq o)$:

Für $x \subset \mathfrak{K}\varrho\,(a)$ und $x \neq o$ soll gelten

$$\operatorname*{Min}_{\lambda \geqq 0} |a - \lambda\, x| \leqq \varrho\, |a|$$

Außerdem soll stets $o \subset \mathfrak{K}\varrho\,(a)$ sein. Mit dieser Definition gilt offenbar: Aus $x \subset \mathfrak{K}\varrho\,(a)$ folgt $\lambda\, x \subset \mathfrak{K}\varrho\,(a)$, wenn $\lambda \geqq O$. Aus $x \subset \mathfrak{K}\varrho\,(a)$ folgt $x \subset \mathfrak{K}\varrho\,(\lambda\, a)$ mit $\lambda > O$. Weiter folgt

5. *Mit* $x, y \subset \mathfrak{K}\varrho\,(a)$ *ist auch* $\sigma\, x + (1 - \sigma)\, y \subset \mathfrak{K}\varrho\,(a)$, *wo* $O \leqq \sigma \leqq 1$. (Die Menge der eben genannten Punkte wird im folgenden auch als Verbindungsstrecke von x und y bezeichnet.) Ist

$$|a - \lambda_1\, x| \leqq \varrho\, |a|, \quad |a - \lambda_2\, y| \leqq \varrho\, |a|,$$

dann auch

$$|a-\lambda_3(\sigma x+(1-\sigma)y)|\leqq\varrho|a| \quad \text{wo} \quad \lambda_3=\lambda_1\lambda_2(\sigma\lambda_2+(1-\sigma)\lambda_1)^{-1}$$

6. *Sei* $x\subset\mathfrak{R}\varrho(a)$ *und* $x\neq o$. *Dann ist*

$$(1-\varrho)|a|\leqq|\underline{\lambda}(x)x|\leqq|\bar{\lambda}(x)x|\leqq(1+\varrho)|a|.$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt nämlich, wenn

$$|b|<(1-\varrho)|a| \text{ und } |c|>(1+\varrho)|a|$$
$$|a-b|\geqq|a|-|b|>\varrho|a|,$$
$$|a-c|\geqq|c|-|a|>\varrho|a|.$$

7. *Ist* $v_n\subset\mathfrak{R}\varrho(a)$ *und* $\Sigma|v_i|$ *divergent, dann ist auch*

$$\lim_{n\to\infty}|v_1+\ldots+v_n|=\infty$$

Beweis: Zu jedem v_i existiert ein $\underline{\lambda}(v_i)$. Wir setzen $\underline{\lambda}(v_i)^{-1}a=a_i$. Wegen

$$\begin{aligned}|a-\lambda v_i|&>|a-\underline{\lambda}v_i| \text{ für } \lambda<\underline{\lambda}\\ |a-\lambda v_i|&\geqq|a-\underline{\lambda}v_i| \text{ für } \lambda\geqq\underline{\lambda}\end{aligned} \tag{8}$$

hat man

$$\begin{aligned}|a_i-\lambda v_i|&>|a_i-v_i| \text{ für } \lambda<1\\ |a_i-\lambda v_i|&\geqq|a_i-v_i| \text{ für } \lambda\geqq1\\ |a_i-v_i|&\leqq\varrho|a_i|\end{aligned} \tag{8'}$$

Weiter hat man

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n-(v_1+v_2+\ldots+v_n)|\leqq|a_1-v_1|+\ldots+$$
$$+|a_n-v_n|\leqq\varrho(|a_1|+\ldots+|a_n|)=\varrho|a_1+\ldots+a_n| \tag{9}$$

Aus (9) folgt, wenn $v_1+\ldots+v_n=s_n$, $a_1+\ldots+a_n=t_n$ gesetzt wird,

$$|s_n|\geqq|t_n|-|t_n-s_n|\geqq(1-\varrho)|t_n|. \tag{10}$$

Außerdem ist wegen (8')

$$|v_i|\leqq|v_i-a_i|+|a_i|\leqq(1+\varrho)|a_i|. \tag{11}$$

Wegen $|t_n|=|a_1|+\ldots+|a_n|$ folgt aus (10) und (11)

$$|s_n|\geqq(|a_1|+\ldots+|a_n|)(1-\varrho)\geqq(|v_1|+\ldots+|v_n|)(1-\varrho)(1+\varrho)^{-1}$$

Aus dieser Ungleichung folgt die Behauptung.

8. *Wenn* $b\subset\mathfrak{R}\varrho(a)$, $O<\varrho<1$ *und* $c\subset\mathfrak{R}\sigma(b)$ $O<\sigma<1$, *dann ist* $c\subset\mathfrak{R}\tau(a)$ *mit* $\tau=\varrho+\sigma(1+\varrho)$.

Sei

$$|a-\lambda_1 b|\leqq\varrho|a| \text{ und } |b-\lambda_2 c|\leqq\sigma|b|$$

Es ist nach 6.

$$(1-\varrho)\,|\,a\,| \leqq \lambda_1\,|\,b\,| \leqq (1+\varrho)\,|\,a\,|.$$

Daraus folgt

$$\operatorname*{Min}_{\nu \geqq 0} |\,a - \nu\,c\,| \leqq |\,a - \lambda_1 b\,| + \lambda_1\,|\,b - \lambda_2 c\,| \leqq \varrho\,|\,a\,| + \lambda_1 \sigma\,|\,b\,| \leqq$$
$$\leqq \varrho\,|\,a\,| + \sigma\,(1+\varrho)\,|\,a\,|, \text{ w. z. z. w.}$$

Wir erweitern nun den Raum E zu einem Raum E^*, indem wir einen einzigen unendlich fernen Punkt ∞ hinzunehmen, ähnlich wie man die komplexe Zahlenebene durch einen unendlich ferneren Punkt erweitert. Als Umgebungen von ∞ definieren wir die Mengen der x für die $|\,x\,| > \gamma > 0$.

E^* ist nicht mehr metrisch, da für den Punkt ∞ kein Abstand von einem anderen Punkt definiert ist. Aber E^* ist jedenfalls ein topologischer Raum und es ist $\lim p_n = \infty$ dann und nur dann, wenn $\lim |\,p_n\,| = \infty$[2].

$\mathfrak{K}$ sei jetzt eine abgeschlossene zusammenhängende Teilmenge von E^*, d. h. eine Menge, die nicht in zwei abgesonderte nichtleere Teilmengen zerlegt werden kann. (Zwei Mengen heißen abgesondert, wenn jede mit der anderen weder Punkte noch Häufungspunkte gemein hat.) Dann beweisen wir

9. *Zu je zwei Punkten* $a, b \subset \mathfrak{K}$, $a, b \neq \infty$ *und zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es eine Kette von Punkten* $b_0, b_1, \ldots, b_n$ *mit* $b_0 = a$, $b_n = b$, *von der je zwei Glieder entweder den Abstand kleiner* ε *haben oder beide außerhalb der Kugel mit dem Radius* $\frac{1}{\varepsilon}$ *liegen, also*

$$|\,b_i - b_{i+1}\,| < \varepsilon \text{ oder } \mathit{Min}\,(\,|\,b_i\,|, |\,b_{i+1}\,|\,) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Beweis: Wenn die abgeschlossene Menge $\mathfrak{K}$ den Punkt ∞ nicht enthält, dann ist sie von selbst beschränkt. Nach einem bekannten Satz (vgl. etwa H. Hahn, Reelle Funktionen, S. 100) kann man dann je zwei Punkte von $\mathfrak{K}$ durch eine ε — Kette aus $\mathfrak{K}$ verbinden. Ist aber $\infty \subset \mathfrak{K}$, dann wählen wir $\gamma > \frac{1}{\varepsilon}$. Alle x mit $|\,x\,| \leqq \gamma$ bilden eine abgeschlossene Menge $U\,\gamma$ in E^*. Wenn a und b in $E^* - U\,\gamma$ liegen, ist nichts mehr zu beweisen. Sei also etwa $a \subset U\,\gamma$. Wir bilden die größte zusammenhängende Menge $\mathfrak{A}\,(a) \subset \mathfrak{K} \cap U\,\gamma$ die a enthält. Mindestens ein x mit $|\,x\,| = \gamma$ muß Häufungspunkt von $\mathfrak{A}\,(a)$ sein. Ist dies nicht

[2] Bei dieser Benützung des Symbols ∞ für zwei verschiedene Dinge ist wohl ein Mißverständnis ausgeschlossen.

der Fall, so müssen, so behaupten wir, $\mathfrak{A}(a)$ und $\mathfrak{R} - \mathfrak{A}(a)$ abgesondert sein. Zunächst sind dann nämlich $\mathfrak{A}(a)$ und $(\mathfrak{R} - \mathfrak{A}(a)) \cap U\gamma$ abgesondert, da sonst $\mathfrak{A}(a)$ nicht der größte zusammenhängende Teil von $\mathfrak{R} \cap U\gamma$ wäre, der a enthält (vgl. Hahn, loc. cit., S. 101, 16. 3. 1.). Es sind aber auch $\mathfrak{A}(a)$ und $(\mathfrak{R} - \mathfrak{A}(a)) \cap (E^* - U\gamma)$ abgesondert, denn sie sind fremd und für alle Häufungspunkte x von $\mathfrak{A}(a)$ ist $|x| \leqq \gamma$ und für die Häufungspunkte y von $E^* - U\gamma$ ist $|y| \geqq \gamma$. Wäre also etwa $y \subset \mathfrak{A}(a)$, so würde folgen $|y| = \gamma$, also doch ein Häufungspunkt der genannten Art existieren. Sei also jetzt $|x_1| = \gamma$ und $x_1 \subset \mathfrak{A}(a)$. Dann kann man a mit x_1 durch eine ε-Kette aus $\mathfrak{R}$ verbinden. Ebenso kann man b, wenn es in $U\gamma$ liegen sollte, durch eine ε-Kette in $\mathfrak{R}$ mit einem Punkt x_2 verbinden, für den $|x_2| = \gamma$ ist und damit ist alles bewiesen.

10. *Sei* $a, b \subset E$, $|a| > \gamma$, $|b| > \gamma$. Dann kann man $z_0, z_1, \ldots, z_n$, $z_0 = a$, $z_n = b$, so angeben, daß alle Punkte der abgeschlossenen Verbindungsstrecke von z_i und z_{i+1} ganz in der Menge $|x| > \gamma$ liegen.

Sei zunächst $b \neq \mu a$ mit $\mu < O$. Dann ist

$$\text{Min}\,|\sigma b + (1-\sigma) a| = \delta > 0,\ 0 \leqq \sigma \leqq 1. \tag{12}$$

Wäre nämlich $\delta = 0$, dann gäbe es ein σ_0 mit $0 < \sigma_0 < 1$ und

$$\sigma_0 b + (1 - \sigma_0) a = 0,\ b = -\left(\frac{1}{\sigma_0} - 1\right) a$$

gegen die Annahme. Man wähle $\lambda > 1$ so groß, daß $\lambda\delta > \gamma$. Dann folgt aus (12) $|\lambda\sigma b + (1-\sigma)\lambda a| > \gamma$. Man setzt nun $z_0 = a$, $z_1 = \lambda a$, $z_2 = \lambda b$, $z_3 = b$. Wenn $b = \mu a$ $(\mu < 0)$, wählt man einen Punkt c mit $|c| > \gamma$ und $c \neq \lambda a$ (λ reell)[3]. Dann kann man nach dem eben gesagten a mit c und c mit b auf die verlangte Art verbinden.

Zum Schluß dieses Abschnittes beweisen wir noch einen Hilfssatz über halbstetige Funktionen, den wir später benötigen:

11. *Im Intervall* $O \leqq \sigma \leqq 1$ *sei* $f(\sigma)$ *unterhalb stetig und* $g(\sigma)$ *oberhalb stetig. Weiter sei dort* $f \leqq g$ *und* $f(O) \geqq O$, $g(1) \leqq O$. *Dann gibt es ein* σ_0 *in* $O \leqq \sigma \leqq 1$, *für das*

$$f(\sigma_0) \leqq O \leqq g(\sigma_0). \tag{13}$$

Beweis: Aus der Definition der Ober- und Unterhalbstetigkeit folgt, daß die Mengen $\mathfrak{M}_1$, bzw. $\mathfrak{M}_2$, in denen $g \geqq O$, bzw. $f \leqq O$ ist, abgeschlossen sind. Laut Annahme sind $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ nicht leer. Wenn $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ keinen Punkt gemeinsam haben, dann gibt es ein ganzes Intervall,

[3] Den trivialen Fall $E = \lambda a$, λ reell, schließen wir aus.

welches zu beiden Mengen fremd ist. Für einen Punkt σ_1 dieses Intervalles wäre $g(\sigma_1) < O$ und $f(\sigma_1) > O$, während laut Annahme immer $f(\sigma) \leqq g(\sigma)$ sein sollte. Also muß es mindestens einen Punkt σ_0 geben, der beiden Mengen gemeinsam ist, für den also (13) gilt.

Wenn $f = g$ ist, dann ist diese Funktion stetig und der Satz liefert die Aussage des gewöhnlichen Zwischenwertsatzes der Differentialrechnung.

2.

$\mathfrak{M}$ sei eine Menge von Drehungen des Raumes E in sich, welche folgende *Eigenschaft* (E) habe:

Sei $a \neq o$ beliebig aus E. Dann gibt es ein festes ϱ mit $O < \varrho < 1$. so daß zu jedem Punkt $b \subset E$ ein $M \subset \mathfrak{M}$ existiert mit $M\, b \subset \mathfrak{K}\, \varrho\, (a)$.

Wenn $\mathfrak{M}$ die Eigenschaft (E) hat, gilt folgender

Satz 1: Sei $|\, a_n \,| \longrightarrow O$ *und* $\sum_{\nu=1}^{n} |\, a_\nu \,| \longrightarrow \infty$ *mit* $n \longrightarrow \infty$. *Zu jedem Punkt* $a \subset E$ *gibt es Drehungen* $M_\nu \subset \mathfrak{M}$ *für die*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\, a_\nu = a.$$

Beweis: Wir bestimmen M_ν in der Weise, daß $M_\nu\, a_\nu \subset \mathfrak{K}\, \varrho\, (a)$ und setzen $M_\nu\, a_\nu = a_\nu$. Wegen $|\, \bar{a}_\nu \,| = |\, a_\nu \,|$ ist $\Sigma\, |\, \bar{a}_\nu \,|$ divergent und daher wegen 1. 7. auch $|\, \sum_1^n \bar{a}_\nu \,| \longrightarrow \infty$ mit $n \longrightarrow \infty$. Es gibt einen Index n_1, so daß[4]

$$\underline{\lambda}\, (\sum_1^n \bar{a}_\nu) > 1, \text{ wenn } n < n_1$$

und

$$\underline{\lambda}\, (\sum_1^{n_1} \bar{a}_\nu) \leqq 1.$$

Denn wählt man N so groß, daß $|\, \sum_1^N \bar{a}_\nu \,| \geqq (1 + \varrho)\, |\, a \,|$, dann ist nach 1. 6. jedenfalls bereits $\underline{\lambda}\, (\sum_1^N \bar{a}_\nu) \leqq 1$, also tritt dies für ein $n_1 \leqq N$ ein. Nun unterscheiden wir zwei Fälle. Ist $\bar{\lambda}\, (\sum_1^{n_1} \bar{a}_\nu) \geqq 1$, dann ist nach Definition von $\underline{\lambda}$ und $\bar{\lambda}$

[4] $\underline{\lambda}\, (\sum_1^{n_1} \bar{a}_\nu)$ ist hier das in 1. 2. definierte, dem Punkt $\sum_1^{n_1} \bar{a}_\nu$ zugeordnete $\underline{\lambda}$.

$$|a - \sum_{1}^{n_1} \bar{a}_\nu| \leqq \varrho\,|a|.$$

Ist aber $\bar{\lambda}(\sum_{1}^{n_1} \bar{a}_\nu) < 1$, dann gibt es ein σ mit $O < \sigma < 1$ und

$$|a - (\sum_{\nu=1}^{n_1-1} \bar{a}_\nu + \sigma\,\bar{a}_{n_1})| \leqq \varrho\,|a|. \tag{14}$$

Denn betrachten wir die Funktionen

$$\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}(\sigma) = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\left(\sum_{\nu=1}^{n_1-1} \bar{a}_\nu + \sigma\,\bar{a}_{n_1}\right)$$

so sind diese unter-, bzw. oberhalbstetig für $O \leqq \sigma \leqq 1$ nach 1. 4. Weiter ist immer $f \leqq g$ und $f(O) > 1$, $g(1) < 1$. Aus 1. 11. folgt dann die Existenz eines σ mit $O < \sigma < 1$ und $f(\sigma) \leqq 1 \leqq g(\sigma)$ und für dieses σ gilt (14). Unter Benützung der Dreiecksungleichung hat man weiter

$$|a - \sum_{1}^{n_1} \bar{a}_\nu| \leqq \varrho\,|a| + |a_{n_1}|. \tag{15}$$

Wir ersetzen nun den Nullpunkt o durch $\sum_{1}^{n_1} \bar{a}_\nu$, den Punkt a durch $a - \sum_{1}^{n_1} \bar{a}_\nu$ und setzen das Verfahren mit den Gliedern a_ν, $\nu > n_1$, fort. So erhalten wir einen Index $n_2 > n_1$ und gewisse $M_\nu\,a_\nu$ $(n_1 < \nu \leqq n_2)$ die wir wieder mit $\bar{a}_\nu$ bezeichnen, so daß

$$|a - \sum_{1}^{n_2} \bar{a}_\nu| \leqq \varrho\,|a - \sum_{1}^{n_1} \bar{a}_\nu| + |a_{n_2}|. \tag{15'}$$

Allgemein erhält man nach k-Schritten

$$|a - \sum_{1}^{n_k} \bar{a}_\nu| \leqq \varrho\,|a - \sum_{1}^{n_{k-1}} \bar{a}_\nu| + |a_{n_k}| \tag{15''}$$

Aus diesen Ungleichungen folgt ohne weiteres

$$|a - \sum_{1}^{n_{k+j}} a_\nu| \leqq \varrho^j\,|a - \sum_{1}^{n_k} \bar{a}_\nu| + \frac{1-\varrho^j}{1-\varrho}\,\operatorname*{Max}_{n \geqq n_k} |a_n| \quad .$$

Daraus schließt man

$$\lim_{r \to \infty} \sum_{1}^{n_r} |\bar{a}_\nu| = a$$

indem man zuerst durch genügend große Wahl von k das zweite Glied

rechts beliebig verkleinert und dann durch genügend große Wahl von j auch das erste Glied beliebig verkleinern kann (da ja $O < \varrho < 1$).

Es ist aber mit $n_k < n < n_{k+1}$

$$| a - \sum_{1}^{n} \bar{a}_\nu | \leqq | a - \sum_{1}^{n_k} \bar{a}_\nu |$$

und daraus folgt auch

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} \bar{a}_\nu = a.$$

Zu dem eben bewiesenen Satz vergleiche man die Arbeit von *H. Hornich* (s. Literaturverzeichnis).

3.

Wir wollen nun das in 2. bewiesene Resultat in gewisser Weise verschärfen. Wir nehmen an, daß die Menge $\mathfrak{M}$ nur endlichviele Drehungen (etwa l) enthält, unter denen I, die identische Drehung vorkommen möge. Dann gilt der folgende

Satz 2[5]: *Sei* $a_n \longrightarrow O$ *und* $| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu | \longrightarrow \infty$ *mit* $n \longrightarrow \infty$. *Weiter sollen die l-Drehungen von* $\mathfrak{M}$ *in irgend einer Weise angeordnet sein*: $M_0 M_1 \ldots M_l$ *und wir erklären* $M_k = M_r$, *wenn* $k \equiv r \pmod{l}$ *ist. Dann können zu beliebigem* $a \subset E$ $M_{k_\nu} \subset \mathfrak{M}$ *so bestimmt werden, daß*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} M_{k_\nu} a_\nu = a$$

und daß außerdem die Bedingung erfüllt ist

$$k_{\nu+1} \equiv k_\nu \text{ oder } k_{\nu+1} \equiv k_\nu + 1 \pmod{l} \qquad (B)$$

Beweis: Sei $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Wir wählen ein $\sigma > O$, für das $\varrho + \sigma (1 + \varrho) = \bar{\varrho} < 1$. Wir bestimmen dann den kleinsten Index $n_1 \geqq l$ so, daß

$$| a_l + a_{l+1} + \ldots + a_{n_1} | \sigma \geqq | a_1 | + | a_2 | + \ldots + | a_{l-1} | \qquad (15)$$

Wegen der Voraussetzung über Σa_n ist dies immer möglich. Dann, behaupten wir, kann man die Glieder der Partialsumme s_{n_1} so auf eine der Bedingung (B) genügende Art mit Drehungen aus $\mathfrak{M}$ multiplizieren,

---

[5] Vgl. hiezu meine Note Monatshefte f. Math. 52.

daß die geänderte Teilsumme s'_{n_1} in $\mathfrak{K}\bar{\varrho}\,(a)$ liegt. In der Tat kann man zunächst l_1 $(O \leqq l_1 < l)$ so finden, daß der Punkt

$$M_{l_1}(a_l + \ldots + a_{n_1})$$

in $\mathfrak{K}\varrho\,(a)$ liegt, da die Menge $\mathfrak{M}$ der Drehungen die Eigenschaft (E) hat. Wenn $l_1 = 0$ ist, dann setzen wir $s'_{n_1} = s_{n_1}$, wenn $l_1 > 0$ ist

$$s'_{n_1} = M_1 a_1 + \ldots + M_{l_1-1} a_{l_1-1} + M_{l_1}\ (a_{l_1} + \ldots + a_{n_1}).$$

Diese Multiplikation genügt offenbar der Bedingung (B). Außerdem liegt aber s'_{n_1} in $\mathfrak{K}\varrho\,(a)$. Denn sei

$$|a - x| \leqq \varrho\ |a|$$

also $x \subset \mathfrak{K}\varrho\,(a)$ und sei

$$|y - x| \leqq \sigma\,(1 + \varrho)\,|a|$$

dann ist

$$|a - y| \leqq \varrho\,|a|.$$

Nach 1. 6. ist außerdem $|x| \leqq (1 + \varrho)\,|a|$. Wendet man dies auf die in der Ungleichung (15) vorkommenden Größen an, so sieht man, daß s'_{n_1} in $\mathfrak{K}\varrho\,(a)$ liegt.

Nun bestimmen wir den kleinsten Index $n_2 \geqq n_1 + l$, so daß analog zu (15) die Ungleichung gilt

$$|a_{n_1+l} + \ldots + a_{n_2}|\,\sigma \geqq |a_{n_1+1}| + \ldots + |a_{n_1+l-1}|\,.$$

Dann kann man wie vorhin die Glieder des Abschnittes

$$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2},$$

so mit Drehungen aus $\mathfrak{M}$ multiplizieren, daß der geänderte Abschnitt b'_2 in $\mathfrak{K}\varrho\,(a)$ liegt und daß außerdem zusammen mit den schon bestimmten $l_1, \ldots, l_{n_1}$ die Bedingung (B) erfüllt ist. Dazu wählen wir erstens l_2 mit $O \leqq l_2 < l$, so daß der Punkt

$$M_{l_2}(s_{n_2} - s_{n_1+l-1})$$

in $\mathfrak{K}\,\varrho\,(a)$ liegt. Wenn $l_2 = l_1$, so setzen wir $b'_2 = M_{l_1} b_2$. Wenn $l_2 \neq l_1$, so sei $l_1 + r$ die kleinste der Zahlen $l_1 + 1,\ l_1 + 2, \ldots l_1 + l - 1$, welche $\equiv l_2 \pmod{l}$ ist. Wir setzen dann

$$b'_2 = M_{l_1+1} a_{n_1+1} + \ldots + M_{l_1+r-1} a_{n_1+r-1} + M_{l_1+r}\,(a_{n_1+r} + \ldots + a_{n_2}) =$$
$$= M_{l_1+1} a_{n_1+1} + \ldots + M_{l_2-1} a_{n_1+r-1} + M_{l_2}\,(a_{n_1+r} + \ldots + a_{n_2}).$$

Diese Änderungen genügen (B). Weiter liegt b'_2 in $\mathfrak{K}\varrho\,(a)$ und daher nach 1. 5. auch

$$s'_{n_2} = s'_{n_1} + b'_2.$$

Nun verläuft der Beweis analog Satz 1, wobei jetzt die b_n die Rolle der dortigen a_n übernehmen. Wir ändern weitere Abschnitte

$$b_3 = s_{n_3} - s_{n_2} \qquad n_3 > n_2 + l$$
$$b_4 = s_{n_4} - s_{n_3} \qquad n_4 > n_3 + l$$

so ab, daß die geänderten Abschnitte $b'_3, b'_4, \ldots$ alle in $\mathfrak{K}\bar{\varrho}\,(a)$ liegen. Und zwar soll n_j immer der kleinste Index $\geqq n_{j-1} + l$ sein, für den

$$|a_{n_{j-1}+l} + \ldots + a_{n_j}|\,\sigma \geqq |a_{n_{j-1}+1}| + \ldots + |a_{n_{j-1}+l-1}| \qquad (16)$$

Es liegen nun auch die Teilsummen $s'_{n_3} = s'_{n_2} + b'_3$, $s'_{n_4} = s'_{n_3} + b'_4$ usw. in $\mathfrak{K}\bar{\varrho}\,(a)$. Wir können jetzt die Schlußweise anwenden, welche zum Beweis des Satzes 1 verwendet wurde, wenn wir noch nachweisen, daß $|b'_n| \longrightarrow O$ und $\sum_1^n |b'_j| \longrightarrow \infty$. Wir zeigen zunächst das erstere. Da n_j der kleinste Index $\geqq n_{j-1} + l$ sein sollte, für den (16) gilt, hat man

$$|a_{n_{j-1}+l} + \ldots + a_{n_j-1}| < \sigma^{-1}(|a_{n_{j-1}+1}| + \ldots + |a_{n_{j-1}+l-1}|$$

und also

$$|b'_j| < (|a_{n_{j-1}+1}| + \ldots + |a_{n_{j-1}+l-1}|)(1 + \sigma^{-1}) + |a_{n_j}|$$

Rechts stehen l Glieder, die mit $j \longrightarrow \infty$ gegen O streben, also $|b'_j| \longrightarrow O$. Zweitens gilt (ebenfalls wegen (16))

$$|b'_j| \geqq |a_{n_{j-1}+l} + \ldots + a_{n_j}|\,(1 - \sigma)$$

und außerdem

$$|a_{n_{j-1}+1} + \ldots + a_{n_j}| \leqq |a_{n_{j-1}+l} + \ldots + a_{n_j}|\,(1 + \sigma)$$

also

$$|b'_j| \geqq |a_{n_{j-1}+1} + \ldots + a_{n_j}|\,(1 - \sigma)\,(1 + \sigma)^{-1}.$$

Wegen $|\sum_1^n a_\nu| \longrightarrow \infty$ ist daher auch $\sum_1^n |b'_j| \longrightarrow \infty$. Hiemit ist der Beweis des Satzes in allen Teilen vollendet.

4.

Folgender Satz stammt von *H. Auerbach*: Ist Σa_ν eine divergente Reihe mit positiven Gliedern, dann kann man $\delta_\nu = \pm 1$ so wählen, daß die Reihe $\Sigma \delta_\nu a_\nu$ eine beliebig vorgegebene Summe hat und daß außerdem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu = O,$$

daß also positive und negative δ_ν gleichmäßig verteilt sind. Wir wollen nun einen Satz beweisen, der den obigen als Spezialfall enthält. Wir zeigen

Satz 3: *Die Menge $\mathfrak{M}$ aus Satz 1 sei eine endliche Gruppe. Dann kann man erreichen, daß die M_ν aus Satz 1 außer den dort verlangten Eigenschaften noch die folgende haben*: *Wenn n_i $(i = 0, 1, \ldots, l-1)$ die Anzahl der Glieder mit Index $\leqq n$ bedeutet, die mit M_i multipliziert sind, dann gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n_i}{n} = \frac{1}{l} \tag{A}$$

Beweis: Beim Beweis benützen wir den folgenden von *Auerbach* stammenden Hilfssatz: Jede divergente Reihe $\Sigma\, a_\nu$, $a_\nu > 0$, enthält eine divergente Teilreihe der Dichte Null, d. h. wenn $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}$ diese Teilreihe ist, so ist

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k_j \leqq n} 1 = 0.$$

Sei $\sum_j a_{k_j}$ eine Teilreihe der Dichte Null von $\Sigma\, a_n$, für die $\sum_j |\, a_{k_j}\,| = \infty$. Bezeichnen wir die restlichen Glieder in unveränderter Reihenfolge mit $\bar{a}_n$. In der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \,(M_0\, \bar{a}_\nu + M_1 \bar{a}_{\nu+1} + \ldots + M_{l-1}\, \bar{a}_{\nu+l-1}\,) \tag{17}$$

kann man nach Satz 1 die $M_\nu \subset \mathfrak{M}$ so wählen, daß die Reihe konvergent wird (wenn dies nicht bereits der Fall sein sollte mit allen M_ν gleich der identischen Drehung). Wegen der Gruppeneigenschaften sind in $M_\nu\, M_0$, $M_\nu\, M_1$, $\ldots$ $M_\nu\, M_{l-1}$ wieder alle Elemente der Gruppe genau einmal enthalten und für diese Abänderung der Reihe $\Sigma\, \bar{a}_n$ ist (A) offenbar erfüllt. Man sieht sofort, daß ein Einfügen der mit beliebigen Elementen aus $\mathfrak{M}$ multiplizierten Glieder a_{k_j} an ihre früheren Plätze eine Änderung der Reihe $\Sigma\, a_n$ darstellt, die der Bedingung (A) genügt, da die a_{k_j} mit der Dichte Null in $\Sigma\, a_n$ verteilt sind. Ist s die Summe der Reihe (17) und soll $\Sigma\, M_\nu\, a_\nu$ zum Werte a konvergent gemacht werden, so wählen wir M_{k_j} so, daß

$$\sum_{j=1}^{\infty} M_{k_j}\, a_{k_j} = s - a$$

wird, was nach Satz 1 stets möglich ist.

Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, daß in dem Fall, daß E der euklidische R_n ist, die Gruppe der Drehungen eines regulären Simplexes in sich die Eigenschaft (E) hat. Da die Summe der Vektoren, die vom Mittelpunkt eines Simplexes nach seinen Ecken führen verschwindet, kann die Bedingung (A) in diesem Fall auch so formuliert werden: Für jeden festen Vektor $e \subset R_n$ ist

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu e = 0,$$

so daß also ein fester Vektor sozusagen im Mittel keine Änderungen erfährt.

5.

Wir betrachten nun die Gruppe der Drehungen des R_n, die o festlassen und ein n-dimensionales reguläres Simplex mit o als Mittelpunkt in sich überführen. Diese Gruppe ist die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_{n+1}$ von $(n+1)$ Variablen, die mit den Ecken des Simplex identifiziert werden mögen. Wir wollen nun zeigen, daß die Gruppe die Eigenschaft (E) hat.

Zu diesem Zwecke teilen wir die Oberfläche des n-dimensionalen Simplexes in geeigneter Art in Fundamentalbereiche der $\mathfrak{A}_{n+1}$ ein und zeigen dann, daß jeder Kegel mit Öffnungswinkel $\pi - \delta$ (wo $\delta > 0$ geeignet gewählt wird) einen der Fundamentalbereiche ganz enthält.

Jedes Randdreieck des n-dimensionalen Simplexes $\mathfrak{S}_n$ teilen wir in drei kongruente Teile, indem wir von seinem Mittelpunkt aus die Senkrechten auf die Seiten fällen. Jedes Randtetraeder teilen wir in die 3.4 Pyramiden, die den Mittelpunkt des Tetraeders zur Spitze haben und zur Basis einen der drei Teile in die jedes Begrenzungsdreieck bereits zerlegt ist. Auf diese Weise fahren wir fort: Wenn die $(k-1)$-dimensionalen Seiten eines k-dimensionalen Simplexes bereits zerlegt sind, so zerlegen wir dieses in die Pyramiden, deren Spitze im Mittelpunkt des k-dimensionalen Simplexes liegt und deren Grundflächen von den Teilen der bereits zerlegten $(k-1)$-dimensionalen Seiten gebildet werden. So erhalten wir eine Zerlegung jedes Randsimplexes $\mathfrak{S}_{n-1}$ von $\mathfrak{S}_n$ in 3.4. ... $(n-1)\,n$ kongruente Polyeder, so daß die gesamte Oberfläche von $\mathfrak{S}_n$ in $\frac{1}{2}(n+1)!$ Teile $\mathfrak{B}_i$ zerfällt.

Jeder Teil $\mathfrak{B}_i$ kann als Fundamentalbereich der Gruppe $\mathfrak{A}_{n+1}$ verwendet werden. Um das einzusehen, hat man zunächst zu zeigen, daß jeder solche Bereich $\mathfrak{B}_i$ durch eine Substitution aus $\mathfrak{A}_{n+1}$ in jeden anderen $\mathfrak{B}_k$ übergeführt werden kann. Wir beweisen das durch vollständige Induktion nach der Dimensionszahl n. Für $n = 2$ ist die

Behauptung sicher richtig. Sie sei für $n-1$ bereits bewiesen. Liegen dann die beiden Bereiche auf der selben $(n-1)$-dimensionalen Seitenfläche $\mathfrak{S}_{n-1}$, so ist laut Induktionsannahme alles bewiesen. Denn wenn man die beiden Bereiche vom Mittelpunkt von $\mathfrak{S}_{n-1}$ aus auf seinen Rand projiziert, erhält man zwei $(n-2)$-dimensionale Bereiche, die laut Induktionsannahme unter der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ äquivalent sind. ($\mathfrak{A}_n$ = Untergruppe der $\mathfrak{A}_{n+1}$ die $\mathfrak{S}_{n-1}$ in sich überführt). Liegen die beiden Bereiche $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B}_k$ auf verschiedenen $(n-1)$-dimensionalen Seitenflächen, so gibt es jedenfalls eine Drehung der $\mathfrak{A}_{n+1}$, die eine von ihnen in die andere überführt; denn die Gruppe $\mathfrak{A}_{n+1}$ ist jedenfalls transitiv. Damit ist dieser Fall auf den vorangehenden zurückgeführt.

Weiters sieht man, daß $\mathfrak{B}_i$ durch jede Substitution aus $\mathfrak{A}_{n+1}$, die von der identischen verschieden ist, in einen von $\mathfrak{B}_l$ verschiedenen Bereich übergeführt wird. Das kann man wieder etwa durch vollständige Induktion beweisen: Wenn die $(n-1)$-dimensionale Seite von $\mathfrak{S}_n$ auf der $\mathfrak{B}_i$ liegt, in sich übergeführt wird, so folgt die Behauptung aus der Induktionsannahme. Wenn das nicht der Fall ist, dann ist das Bild von $\mathfrak{B}_i$ eo ipso von $\mathfrak{B}_i$ verschieden.

Nun wollen wir zeigen, daß jeder Kegel dessen Punkte x der Gleichung genügen

$$\frac{(x\,a)}{|x|\,|a|} \geqq \frac{1}{n}$$

einen Bereich $\mathfrak{B}_i$ enthält für $n \geqq 5$.

Als Bereich $\mathfrak{B}_i$ kann der Bereich genommen werden, der den Schnittpunkt der Kegelachse mit dem Rand von $\mathfrak{S}_n$ enthält. (Wenn dieser Schnittpunkt auf den Rand eines $\mathfrak{B}_i$ fällt, kann es mehrere solche geben.) Sei also $\mathfrak{B}$ jetzt dieser Bereich. Wir haben dann zu zeigen, daß[6]

$$\operatorname{Min} \frac{(b\,c)}{|b|\,|c|} = \frac{1}{n}, \qquad b \subset \mathfrak{B}, \quad c \subset \mathfrak{B}$$

$\mathfrak{B}$ ist jedenfalls ein konvexes $(n-1)$-dimensionales Polyeder. Das Maximum des Winkels, den die beiden Strahlen $o\,b$ und $o\,c$ miteinander einschließen, kann nur erreicht werden, wenn b und c beide Ecken von $\mathfrak{B}$ sind. Denn ist etwa b keine Ecke, so gibt es eine Strecke, die b enthält und außerdem ganz in $\mathfrak{B}$ liegt. Seien d und e ihre Endpunkte. Dann schließt aber einer der beiden Strahlen od, oe mit oc einen größeren

[6] Der Mittelpunkt von $\mathfrak{S}_n$ ist weiterhin o.

Winkel ein als ob[7]. Man kann also annehmen, daß b und c Ecken von $\mathfrak{B}$ sind.

Zwei Ecken von $\mathfrak{B}$ sind entweder die Mittelpunkte zweier Seiten eines Randdreiecks von $\mathfrak{S}_n$ oder eine Ecke etwa b ist der Mittelpunkt einer k-dimensionalen Seite $\mathfrak{S}_k$ von $\mathfrak{S}_n$ und c ist der Mittelpunkt einer l-dimensionalen Seite $\mathfrak{S}_{k,l}$ von $\mathfrak{S}_k$ $(l < k)$.

Sei φ der Winkel, den die beiden Halbstrahlen ob, oc einschließen. Seien b und c die Mittelpunkte zweier Seiten desselben Randdreieckes. Dann berechnet man

$$\cos\varphi = \frac{n-3}{2n-2} > \frac{1}{n} \qquad \text{für } n \geqq 5.$$

Nun sei b der Mittelpunkt einer k-dimensionalen Seite $\mathfrak{S}_k$ $1 \leqq k \leqq n-1$ und c Mittelpunkt einer l-dimensionalen Seite $\mathfrak{S}_{k,l}$ $(0 \leqq l < k)$ von $\mathfrak{S}_k$. Dann berechnet man für den Winkel φ

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{(n-k)(l+1)}{(n-l)(k+1)}}$$

Bei festem k nimmt diese Funktion von l ihr Minimum für $l = 0$ an. Sein Wert $\sqrt{\frac{n-k}{n(k+1)}}$ ist am kleinsten für $k=n-1$ nämlich gleich $\frac{1}{n}$, also

$$\cos\varphi \geqq \frac{1}{n} \qquad \text{für } n \geqq 2$$

Für $n = 4$ folgt aus dem eben gesagten, daß

$$\operatorname{Min} \frac{(b\,c)}{|b|\,|c|} = \frac{1}{6}, \qquad b, c \subset \mathfrak{B},$$

so daß $\mathfrak{B}$ noch die gestellten Bedingungen erfüllt.

Für $n = 3$ stehen die Halbstrahlen op_1, op_2, die von o zu den Mittelpunkten p_1, p_2 zweier Teraederseiten führen aufeinander senkrecht. Ein Kegel mit der Achse op_1 der op_2 enthält, kann daher keinen Öffnungswinkel $\leqq \pi - \delta$ haben. Es existiert also hier kein Kegel mit der Achse op_1 und einem Öffnungswinkel $\pi - \delta$, der den Bereich $\mathfrak{B}$ ganz enthält. Aber die Tetraedergruppe hat trotzdem die Eigenschaft (E). Um dies

[7] Wenn nicht gerade o, d, b, e auf derselben Geraden liegen, was aber ausgeschlossen ist, da jeder Halbstrahl durch o mit $\mathfrak{B}$ höchstens einen Punkt gemeinsam hat.

einzusehen, schließen wir genügend kleine Umgebungen von p_1 und p_2 aus $\mathfrak{B}$ aus. Geht die Kegelachse durch einen der verbleibenden Punkte von $\mathfrak{B}$, dann kann man offenbar ein festes δ ($\delta > 0$) so wählen, daß jeder solche Kegel mit Öffnungswinkel $\pi - \delta$ $\mathfrak{B}$ ganz enthält. Für die Kegelachsen, die durch die ausgeschlossenen Punkte von $\mathfrak{B}$ gehen, kann man als Fundamentalbereiche die Dreiecke wählen, in die eine Seitenfläche zerfällt, wenn man ihren Mittelpunkt mit ihren Ecken verbindet. (Eventuell muß man dabei δ und die Umgebungen von p_1 und p_2 passend verkleinern.)

Für $n = 2$ ist die Eigenschaft (E) selbstverständlich erfüllt. Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

6.

In 4. wurde gezeigt, daß man in Satz 1 die M_ν so wählen kann, daß für jeden festen Vektor a gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu a = 0 \tag{18}$$

wenn die M_ν aus der Gruppe $\mathfrak{L}_{n+1}$ gewählt werden können. Wir wollen nun eine etwas andere Fragestellung betrachten. E soll der euklidische R_n sein. Die $\alpha_\nu > 0$ seien Glieder einer Nullfolge und $\Sigma \alpha_\nu$ divergent. Wenn a ein fester Vektor ist, so setzen wir $a_\nu = \alpha_\nu a$. Diese a_ν erfüllen die Bedingungen von Satz 1 und man kann also die M_ν aus $\mathfrak{M}$ so wählen, daß $\Sigma M_\nu a_\nu$ beliebige Summe hat. Wir leiten nun eine einfache notwendige Bedingung her, die die M_ν erfüllen müssen, damit die Reihe $\Sigma M_\nu a_\nu$ konvergent ausfällt.

Satz 4: Für die Konvergenz von $\Sigma M_\nu a_\nu$ ist notwendig, daß der Nullpunkt o in dem kleinsten abgeschlossenen konvexen Körper $\mathfrak{K}$ liegt, der alle Häufungspunkte von $M_n a = \bar{a}_n$ enthält.

Beweis: Sei also jetzt $\Sigma M_\nu a_\nu$ konvergent. Es genügt zu zeigen: Für jeden Einheitsvektor e ist

$$\underline{\lim}\, e \,.\, \bar{a}_n \leqq 0 \leqq \overline{\lim}\, e \,.\, \bar{a}_n. \tag{19}$$

Denn sei $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ der konvexe Körper, der aus der Vereinigung aller abgeschlossenen Kugeln vom Radius ε ($\varepsilon > 0$) um die Punkte von $\mathfrak{K}$ besteht. Dann enthält $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ fast alle Punkte $\bar{a}_n$. Da (19) für jedes e gilt, enthält $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ den Nullpunkt. Denn sonst gäbe es eine Stützebene, die $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ von o trennt und für einen zu dieser senkrechten Einheitsvektor könnte (19) nicht gelten. Um (19) einzusehen, setzen wir

$e \,.\, M_\nu a = \gamma_\nu$. Dann ist mit $\Sigma M_\nu a_\nu$ auch $\Sigma \alpha_\nu \gamma_\nu$ konvergent. Wäre nun etwa $\underline{\lim}\, \gamma_\nu > 0$, so hätte man $\gamma_\nu \geqq l > 0$, etwa für $\nu > m$. Daraus würde folgen

$$\sum_{\nu=m}^{n} \alpha_\nu \gamma_\nu \geqq l \sum_{\nu=m}^{n} \alpha_\nu.$$

Da $\Sigma \alpha_\nu$ divergent vorausgesetzt war, widerspricht das der Konvergenz von $\Sigma \alpha_\nu \gamma_\nu$, womit der Satz bewiesen ist.

Die α_ν mögen nun zusätzlich noch monoton angenommen werden. Dann können wir durch partielle Summation auch für die Lage der arithmetischen Mittel (18) der $M_\nu a$ notwendige Bedingungen ableiten. Wir beweisen dazu die folgende Verallgemeinerung eines Satzes, den *H. Rademacher* für den Fall der Ebene bewiesen hat:

Satz 5: Wenn unter den Bedingungen von Satz 4 die α_ν monoton sind, dann muß o im kleinsten abgeschlossenen konvexen Körper $\mathfrak{K}^*$ liegen, der alle Häufungspunkte von

$$c_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu a$$

enthält (natürlich ist $\mathfrak{K}^* \subset \mathfrak{K}$).

Beweis: Es genügt wieder, zu zeigen, daß

$$\underline{\lim}\, e \,.\, c_n \leqq 0 \leqq \overline{\lim}\, e \,.\, c_n$$

für alle Einheitsvektoren e. Mit den Bezeichnungen von Satz 4 und mit $e \,.\, c_n = \tau_n$ ist

$$\sum_{\nu=m}^{n} \alpha_\nu \gamma_\nu = -\alpha_m (m-1)\, \tau_{m-1} + \sum_{\nu=m}^{n-1} \nu\, \tau_\nu (\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) + n\, \alpha_n \tau_n$$

Wäre etwa $\tau_\nu \geqq l > 0$ für $\nu \geqq m$ so folgte wegen $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$

$$\sum_{\nu=m}^{n} \alpha_\nu \gamma_\nu \geqq -\alpha_m (m-1)\, \tau_m + l \sum_{\nu=m}^{n-1} \nu\, (\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) + l\, n\, \alpha_n =$$

$$= -\alpha_m (m-1)\, \tau_m + l\, (m\, \alpha_m + \alpha_{m+1} + \ldots + \alpha_n)$$

und da $\Sigma \alpha_\nu$ divergent sein sollte, könnte $\Sigma \alpha_\nu \gamma_\nu$ nicht konvergieren.

7.

Wir wollen nun die Änderungen betrachten, die die Summe einer Reihe erfährt, wenn man ihre Glieder mit ± 1 multipliziert. Wir betrachten zunächst eine bedingt konvergente Reihe $\Sigma \alpha_\nu$ mit reellen Gliedern. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß ihre Summe Null ist. Es ist bekannt, daß man durch geeignete

Vorzeichenänderung der α_ν Konvergenz gegen jeden Punkt der Zahlengeraden erreichen kann. Wir zeigen

Satz 6: Durch Vorzeichenänderung der positiven Glieder von $\Sigma\,\alpha_\nu$ kann man jede Zahl $s < 0$ als Summe der Reihe erreichen. Dabei kann man erreichen, daß die Teilsummen der geänderten Reihe $> s$ bleiben.

Beweis: Seien $\varepsilon_n > 0$ und $\delta_n > 0$ monotone Nullfolgen mit $\delta_n - \varepsilon_n > \delta_{n+1}$, $\delta_1 < \frac{1}{2}\,|\,s\,|$. Für $n, \bar{n} > m_1$ möge $|\,s_n\,| < \varepsilon_1$, $|\,s_n - s_{\bar{n}}\,| < \varepsilon_1$ sein. Vom Index $m_1 + 1$ angefangen multiplizieren wir solange positive Glieder mit (-1), als die entstehende geänderte Teilsumme s'_n noch $> s + \delta_1$ bleibt. n_1 sei der erste Index, für den

$$s'_{n_1} > s + \delta_1,\ s'_{n_1} - |\,a_{n_1+1}\,| < s + \delta_1$$

Die Glieder mit Indices $> n_1$ behalten wir nun bei bis zu einem Index $m_2\,(> n_1)$ für den $|s_n\,| < \varepsilon_2$, $|\,s_n - s_{\bar{n}}\,| < \varepsilon_2$ mit $n,\ \bar{n} > m_2$. Für die Teilsummen s'_n mit $n_1 < n \leqq m_2$ gilt

$$s + \delta_2 < s + \delta_1 - \varepsilon_1 < s'_n < s + \delta_1 + \varepsilon_1 + |\,a_{n_1+1}\,| \tag{20}$$

weil $|\,s'_n - s'_{n_1}\,| = |\,s_n - s_{n_1}\,| < \varepsilon_1$ ist. Die positiven Glieder mit Indices $> m_2$ multiplizieren wir solange mit (-1), als die so geänderten Teilsummen s'_n $(n \geqq m_2)$ noch $> s + \delta_2$ sind. Dies sei das letzte Mal für den Index n_2 $(n_2 \geqq m_2)$ der Fall. Also

$$s'_{n_2} > s + \delta_2,\ s'_{n_2} - |\,a_{n_2+1}\,| < s + \delta_2.$$

Die darauffolgenden Glieder übernehmen wir wieder unverändert der gegebenen Reihe, und zwar bis zu einem Index m_3 für den

$$|\,s_n\,| < \varepsilon_3\ |\,s_n - s_{\bar{n}}\,| < \varepsilon_3,\ n, \bar{n} > m_3.$$

Für die Teilsummen s'_n mit $n_2 < n \leqq m_3$ ist analog (20)

$$s + \delta_2 - \varepsilon_2 < |\,s'_n\,| < s + \delta_2 + \varepsilon_2 + |\,a_{n_2+1}\,|.$$

Für die Teilsummen s'_n mit $m_2 < n \leqq n_2$ gilt außerdem

$$s + \delta_2 < s'_n < s + \delta_1 + \varepsilon_1 + |\,a_{n_1+1}\,|$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man eine gegen s konvergente Reihe. Ihre Teilsummen bleiben von einem gewissen Index an stets größer als s.

Der eben bewiesene Satz stellt im gewissen Sinne ein Analogon zu dem bekannten Satz von *Sierpinski* dar, nach dem eine bedingt konvergente Reihe durch Umordnung der positiven Glieder allein gegen jeden Wert konvergent gemacht werden kann, der kleiner ist, als ihre Summe.

E sei wie in 2 ein allgemeiner Banach'scher Raum. Während man durch Multiplikation mit geeigneten $M_\nu \subset \mathfrak{M}\, \Sigma\, M_\nu\, a_\nu$ gegen jeden Wert konvergent machen kann (Satz 1), ist dies durch bloße Multiplikation mit ± 1 im allgemeinen nicht möglich. Dies lehrt schon das einfache Beispiel einer Reihe von Vektoren des R_n, die sämtlich in einem linearen Teilraum des R_n liegen. Die Summen, die man durch Vorzeichenänderung überhaupt erreichen kann, liegen dann offenbar alle in diesem Teilraum. Für eine im folgenden zu definierende sehr weite Klasse von Reihen kann man aber doch durch bloße Vorzeichenänderung der Reihenglieder jeden beliebigen Punkt des Raumes als Konvergenzpunkt erreichen.

Die Menge λe, $0 \leqq \lambda < \infty$, heiße Hauptrichtung[8] für die Reihe $\Sigma\, a_\nu$, wenn für jedes σ mit $0 < \sigma < 1$ die Summe derjenigen a_ν, die der Menge $\mathfrak{K}\sigma\,(e)$ angehören, absolut divergent ist. Wir betrachten im folgenden Reihen für die folgendes gilt: Es gibt ein festes ϱ mit $0 < \varrho < 1$, so daß für jedes $a \subset E$, $a \neq o$, in $\mathfrak{K}\varrho\,(a)$ mindestens eine Hauptrichtung enthalten ist.

Satz 7: Wenn $\Sigma\, a_\nu = s$ konvergent ist ($\Sigma\,|\,a_\nu\,| = \infty$) und die eben genannte Bedingung erfüllt, kann man zu jedem Punkt $a \subset E$ die $\delta_\nu = \pm 1$ so bestimmen, daß

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu\, a_\nu = a.$$

Beweis: ε_n sei eine später noch genauer zu definierende monotone Nullfolge. Für $m, n \geqq n_1$ sei

$$|\, s_n - s\,| < \varepsilon_1,\ |\, s_m - s_n\,| < \varepsilon_1.$$

Nach Annahme gibt es in $\mathfrak{K}\varrho\,(s_{n_1} - a)$ eine Hauptrichtung λe. Wir wählen σ so klein, daß $\bar{\varrho} = \varrho + \sigma\,(1 + \varrho) < 1$ wird.

Nach 1.8. ist dann $\mathfrak{K}\sigma\,(e) \subset \mathfrak{K}\bar{\varrho}\,(s_{n_1} - a)$. In $\mathfrak{K}\sigma\,(e)$ liegt nach der Definition der Hauptrichtung eine absolut divergente Teilreihe von $\Sigma\, a_\nu$ etwa

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\, a_{k_i}\,| = \infty.$$

Es ist $-a_{k_i} \subset \mathfrak{K}\bar{\varrho}\,(a - s_{n_1})$. Also gibt es nach einer früheren Überlegung beim Beweis von Satz 1 einen ersten Index $N_1 > n_1$ für den

$$\underline{\lambda}\,(-2 \sum_{n_1 < k_i \leqq N_1} a_{k_i}) \leqq 1$$

[8] Dieser Begriff wurde in anderem Zusammenhang (beim Beweis des *Steinitz*schen Umordnungssatzes) von *A. Wald*, Ergebnisse eines math. Kolloquiums, Wien 1933, und von *W. Neß*, Math. Zeitschr. 42, für Vektorreiehen im R_n eingeführt.

und

$$|a - s_{n_1} + 2 \sum_{n_1 < k_i \leqq N_1} a_{k_i}| \leqq \bar{\varrho}\,|a - s_{n_1}| + 2\,|a_{N_1}|.$$

Multiplizieren wir die a_{k_i}, $n_1 < k_i \leqq N_1$, mit (-1) und wird die so geänderte Partialsumme mit s'_{N_1} bezeichnet, so gilt

$$s'_{N_1} = s_{N_1} - 2 \sum_{n_1 < k_i \leqq N_1} a_{k_i}$$

und

$$|a - s'_{N_1}| \leqq |a - s_{n_1} + 2 \sum_{n_1 < k_i \leqq N_1} a_{k_i}| + |s_{n_1} - s_{N_1}| \leqq$$
$$\leqq \bar{\varrho}\,|a - s_{n_1}| + 2\,|a_{N_1}| + \varepsilon_1.$$

Läßt man die a_n mit $n > N_1$ unverändert und setzt für $n > N_1$ $s'_n = s_n + s'_{N_1} - s_{N_1}$, so konvergiert s'_n gegen $s' = s + s'_{N_1} - s_{N_1}$ und wegen $|s - s_{N_1}| < \varepsilon_1$ ist

$$|s' - s'_{N_1}| < \varepsilon_1$$

Nun nehmen wir ε_2 mit $\varepsilon_2 < \varepsilon_1 - |s' - s'_{N_1}|$ und $n_2 \geqq N_1$ so, daß

$$|s' - s'_n| < \varepsilon_2, \quad |s'_m - s'_n| < \varepsilon_2, \text{ wenn } m, n \geqq n_2. \tag{21}$$

Dann hat man

$$|a - s'_{n_2}| \leqq |a - s'_{N_1}| + |s'_{N_1} - s'| + |s' - s'_{n_2}| <$$
$$< \bar{\varrho}\,|a - s_{n_1}| + 2\,(|a_{N_1}| + \varepsilon_1). \tag{22}$$

Nun wird das Verfahren fortgesetzt, indem man s durch s', s_{n_1} durch s'_{n_2}, ε_1 durch ε_2 ersetzt und den eben gemachten Schluß wiederholt. Durch Multiplikation mit (-1) von Gliedern, deren Index zwischen n_2 und einem gewissen $N_2 > n_2$ liegt, erhält man eine geänderte Teilsumme für die

$$|a - s'_{N_2}| \leqq \bar{\varrho}\,|a - s'_{n_2}| + 2\,|a_{N_2}| + \varepsilon_2$$

und dann ein $n_3 \geqq N_2$, das eine zu (21) analoge Bedingung erfüllt und für das

$$|a - s'_{n_3}| \leqq \bar{\varrho}\,|a - s'_{n_2}| + 2\,(|a_{N_2}| + \varepsilon_2)$$

Aus (22) folgt dann

$$|a - s'_{n_2}| \leqq \bar{\varrho}^2\,|a - s_{n_1}| + 2\,\bar{\varrho}\,(|a_{N_1}| + \varepsilon_1) + 2\,(|a_{N_2}) + \varepsilon_2).$$

Bezeichnet man allgemein mit s'_{n_k} die geänderte Teilsumme, die sich nach $k-1$ Schritten ergibt, so sieht man ähnlich wie beim Beweise von Satz 1, daß

$$|a - s'_{n_{k+j}}| \leqq \bar{\varrho}^j\,|a - s'_{n_k}| + \frac{1 - \bar{\varrho}^j}{1 - \bar{\varrho}} \operatorname*{Max}_{\mu \geqq n_k} 2\,(|a_\mu| + \varepsilon_k) \tag{23}$$

und daraus weiter, daß die so gebildeten Partialsummen gegen a konvergieren. Für später leiten wir noch eine Abschätzung her für die Güte, mit der alle s'_n mit $n > n_k$ den Punkt a approximieren. Sei $n_{k+j} < n < N_{k+j}$. Dann hat man

$$|s'_n - s'_{n_{k+j}}| = |-2\sum_{n_{k+j} < k_i \leqq n} a_{k_i}| \leqq |a - s'_{n_{k+j}}| \tag{24}$$

Für $N_{k+j} \leqq n \leqq n_{k+j+1}$ gilt

$$|s'_n - s'_{n_{k+j}}| \leqq \bar{\varrho}\,|a - s'_{n_{k+j}}| + 2(|a_{N_{k+j}}| + \varepsilon_{k+j}) <$$
$$< |a - s'_{n_{k+j}}| + 2\,\mathrm{Max}_{\mu \geqq n_k}(|a_\mu| + \varepsilon_k), \tag{25}$$

also insgesamt für $n > n_k$

$$|a - s'_n| \leqq |a - s'_{n_{k+j}}| + |s'_n - s'_{n_{k+j}}| \leqq$$
$$\leqq 2(|a - s'_{n_k}| + (1 + \frac{1}{1-\bar{\varrho}})\,\mathrm{Max}_{\mu \geqq n_k}(|a_\mu| + \varepsilon_k)) \tag{26}$$

nach (23), (24), (25).

9.

Wir setzen jetzt E als separabel voraus und erweitern E wie in 1. durch einen Punkt ∞ zum Raum E^*. Dann behaupten wir

Satz 8: Sei $\mathfrak{K}$ eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge von E^*. unter den Voraussetzungen von Satz 7 lassen sich die δ_ν so bestimmen, daß die $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu a_\nu$ alle und nur die Punkte von $\mathfrak{K}$ zu Häufungspunkten haben.

Beweis: Wegen der Separabilität von E^* läßt sich aus $\mathfrak{K}$ eine in $\mathfrak{K}$ dichte abzählbare Teilmenge auswählen. $x_1, x_2, \ldots$ seien die Elemente aus dieser Menge. Wenn $\mathfrak{K}$ nur aus dem Punkt ∞ besteht, ist der Satz nach dem Beweis von Satz 7 offenbar richtig. Diesen Fall schließen wir im weiteren aus. Wir können also annehmen, daß alle $x_i \neq \infty$ sind. Nach 1.9. können wir die Punkte x_n und x_{n+1} durch eine Kette von Punkten $z_0, \ldots, z_k$ so verbinden, daß

$$|z_i - z_{i+1}| < \frac{1}{n} \text{ oder } \mathrm{Min}(|z_i|, |z_{i+1}|) > n$$

$z_0 = x_n$, $z_k = x_{n+1}$. Die Punktepaare, für die die letztere Ungleichung gilt, verbinden wir nach 1.10. durch Strecken, die ganz im Gebiet

$|x| > n$ liegen, wobei im allgemeinen gewisse Punkte, die nicht zu $\mathfrak{R}$ gehören, dazwischengeschaltet werden müssen. Auf diesen Strecken schalten wir, wenn nötig endlichviele weitere Punkte ein (die im allgemeinen ebenfalls nicht zu $\mathfrak{R}$ gehören). Und zwar sollen je zwei aufeinanderfolgende der zwischen z_i und z_{i+1} eingeschalteten Punkte einen Abstand $< \frac{1}{n}$ haben. Diejenigen eingeschobenen Punkte, die nicht zu $\mathfrak{R}$ gehören, haben, wenn sie in unendlicher Anzahl auftreten, den Punkt ∞ als einzigen Häufungspunkt. Nun numerieren wir die x_i und die eingeschalteten Punkte in der bereits bestehenden Reihenfolge und bezeichnen sie mit $y_1, y_2, \ldots$. Die Menge der Häufungspunkte dieser Folge ist dann genau $\mathfrak{R}$. Wir bestimmen nun nach Satz 7 gewisse δ_ν mit $1 \leqq \nu \leqq n_1$, so, daß

$$|y_1 - s'_{n_1}| < 1.$$

Dann δ_ν mit $n_1 < \nu \leqq n_2$ so, daß

$$|y_2 - s'_{n_2}| < \tfrac{1}{2}.$$

Allgemein, wenn die δ_ν mit $\nu \leqq n_i$ schon bestimmt sind, bestimmen wir gewisse δ_ν mit $n_i < \nu \leqq n_{i+1}$ so, daß

$$|y_{i+1} - s'_{n_{i+1}}| < \frac{1}{i+1}.$$

Es gilt $|y_i - y_{i+1}| \longrightarrow 0$ und $|y_i - s'_{n_i}| \longrightarrow 0$, also auch

$$|y_{i+1} - s'_{n_i}| \longrightarrow 0. \tag{27}$$

Für $n_i < \nu \leqq n_{i+1}$ wurden die δ_ν nach Satz 7 bestimmt. Nach der dort bewiesenen Abschätzung (26) gilt

$$|y_{i+1} - s'_\nu| < 2\left(|y_{i+1} - s'_{n_i}| + \left(1 + \frac{1}{1-\varrho}\right) \operatorname*{Max}_{\mu \geqq n_i} (|a_\mu| + \varepsilon_i)\right) \tag{28}$$

wobei die ε_i eine monotone Nullfolge bilden. Sei nun x Häufungspunkt der y_i. Dann ist x nach (27) auch Häufungspunkt der s'_n. Ist umgekehrt s ein Häufungspunkt der s'_n, dann ist nach (28) s auch Häufungspunkt der y_i und also $s \subset \mathfrak{R}$, womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Wir erwähnen noch, daß man einen zu dem eben bewiesenen analogon Satz auch für die in Satz 1 betrachteten Änderungen der Reihenglieder beweisen kann. Es ist außerdem leicht einzusehen, daß die zusammenhängenden abgeschlossenen Mengen aus E^* überhaupt die allgemeinsten Mengen sind, die als Häufungsmengen der Reihen von der Form $\Sigma\, \delta_\nu\, a_\nu$ und $\Sigma\, M_\nu\, a_\nu$ auftreten können.

Literatur:

H. Auerbach, Über die Vorzeichenverteilung in unendlichen Reihen, Studia mathematica 2, S. 228.

H. Hadwiger, Ein Satz über bedingt konvergente Vektorreihen, Math. Zeitschrift 47, S. 663.

H. Hornich, Über Reihen deren Glieder gegen Null konvergieren, Monatshefte f. Math. 45, S. 432.

H. Hornich, Zu einer geometrischen Theorie der Reihen, Monatshefte f. Math. 46, S. 266.

V. Jarnik, Umordnungen von bedingt konvergenten Reihen, Math. Zeitschrift 28, S. 360.

K. Prachar. Zur Geometrie der Reihen, Monatshefte f. Math. 52, S. 255.

H. Rademacher, Über das asymptotoische Verhalten gewisser konvergenzerzeugender Faktoren, Math. Zeitschrift 11, S. 276.

A. Wald, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 5, S. 10, Wien 1933.

Reduzible Zahlen.

Von
W. Knödel, Wien.

(Eingelangt am 4. März 1950.)

Einleitung.

S. D. Chowla und *J. Todd* nennen eine ganze Zahl x „reduzibel"[1], wenn $x^2 + 1$ keinen Primfaktor $p' > 2\,x$ enthält. Sie vermuten: „Reduzible Zahlen besitzen eine Dichte ϱ um 0.3...". Ich beweise in der vorliegenden Arbeit

$$\limsup_{x \to \infty} \varrho \leqq 0{,}5;$$

und gleich etwas allgemeiner folgenden Satz:

Ist ϱ die Dichte jener Zahlen x, für die $x^2 + 1$ keinen Primfaktor $p' > o\,(x \,.\, \log x)$ enthält, dann ist

$$\limsup_{x \to \infty} \varrho \leqq 0{,}5.$$

. . . . . .

Der Gedankengang des Beweises ist folgender: Ich zeige für die Dichte ϱ' jener Zahlen x, für die $x^2 + 1$ Primfaktoren $q'' > f(x)$ enthält (dabei ist $f(x) = o\,(x \,.\, \log x)$

$$\liminf_{x \to \infty} \varrho' \geqq 0{,}5$$

In jedem $x^2 + 1$ geht höchstens eine Primzahl q' mit

$$q' > f(x),\ q' > x$$

auf und die Menge dieser Primzahlen q' ist Teilmenge der Primzahlmenge (q''). Es genügt daher zu zeigen:

Im Produkt $\prod_{x=1}^{A} (x^2 + 1)$ sind mindestens $0{,}5 \,.\, A$ Primzahlen q' enthalten.

Ich zeige sogar *Satz 1*:

---

[1] Canadian Journal of Math., Vol. 1, Nr. 3, 1949.

Im Produkt $\prod_{x=1}^{A}(x^2+1)$ sind mindestens 0,5 . A Primzahlen $q > f(A)$ enthalten.

Dazu bilde ich

$$\log \prod_{x=1}^{A}(x^2+1) = \log \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{e_i} = \log \prod_{p \leqq f(A)} p_i^{e_i} + \log \prod_{q_i > f(A)} q_i \tag{1}$$

und erhalte

$$\log \prod_{q_i > f(A)} q_i = \log \prod_{x=1}^{A}(x^2+1) - \log \prod_{p \leqq f(A)} p_i^{e_i}. \tag{2}$$

Aus (2) wird dann Satz 1 folgen. Denn es gelten die Abschätzungen:

$$\log \prod_{x=1}^{A}(x^2+1) \geqq 2\,A \log A + o\,(A \log A), \tag{I}$$

$$\log \prod_{p \leqq f(A)} p_i^{e_i} \leqq A \log A + o\,(A \log A). \tag{II}$$

Der

Beweis von (I)

ist einfach. Es ist

$$\prod_{x=1}^{A}(x^2+1) > \prod_{x=1}^{A} x^2 = (A!)^2$$

und nach der Stirling'schen Formel

$$(A!)^2 \sim A^{2A}\, e^{-2A} \,.\, 2\pi A,$$

also

$$\log \prod_{x=1}^{A}(x^2+1) \geqq 2\,A \log A + o\,(\mathrm{A} \log A).$$

Dem

Beweis von (II)

müssen Hilfssätze vorangehen.

Hilfssatz 1 ist bekannt: Die Primzahlen aus (1) sind von der Gestalt

$$p = 4r + 1 \text{ oder } 2.$$

Im folgenden bedeutet p eine solche Primzahl; und die Folge dieser Primzahlen, der Größe nach geordnet, bezeichne ich mit $\{p_t\}$.

Beweis: Aus

$$x^2 + 1 \equiv o \pmod{p}$$

folgt, daß — 1 quadratischer Rest von p ist. Und das ist gerade bei den Primzahlen p der Fall.

Hilfssatz 2:

$$\sum_{p \leqq f(A)} 1 = \frac{f(A)}{2 \log f(A)} + o\left(\frac{f(A)}{\log f(A)}\right).$$

Beweis: Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.

Hilfssatz 3:

$$p_t = 2\,t \,.\, \log t + o\,(t \,.\, \log t).$$

Beweis: Landau, a. a. O.

Hilfssatz 4:

$$\sum_{p \leqq f(A)} \frac{\log p}{p-1} = \frac{\log f(A)}{2} + o\,(\log A).$$

Beweis: Nach Hilfssatz 3 ist

$$\sum_{p \leqq f(A)} \frac{\log p}{p-1} = \sum_{p_t \leqq f(A)} \frac{1}{2\,t} + o\,(\Sigma \frac{1}{t}) = \tfrac{1}{2} \log t + o\,(\log t)$$

und nach Hilfssatz 2

$$\tfrac{1}{2} \log t = \frac{\log f(A)}{2} + o\,(\log f(A)$$

Hilfssatz 5: Die Kongruenz

$$x^2 + 1 \equiv 0 \;(\mathrm{mod}\,.\,p^j)$$

besitzt höchstens 2 modulo p^j inkongruente Wurzeln.

Beweis: Wird in der elementaren Zahlentheorie gezeigt.

. . . . . .

Der Beweis von (II) erfolgt nun so:

$$\log \prod_{p \leqq f(A)} p_i^{e_i} = e_1 \log 2 + \sum_{p_i \leqq f(A)} e_i \log p_i; \tag{3}$$

dabei ist e_i die Zahl, die angibt wie oft p_i in $\prod_{x=1}^{A} (x^2 + 1)$ aufgeht. Diese Zahl setzt sich zusammen aus den Lösungen der Kongruenz

$$x^2 + 1 \equiv 0 \;(\mathrm{mod}\,.\,p)\; x = 1, 2, \ldots, A, \tag{4}$$

vermehrt um die Lösungen von

$$x^2 + 1 \equiv 0 \;(\mathrm{mod}\,.\,p^2)\; x = 1, 2, \ldots, A,$$

(hier geht p zweimal auf, einmal wurde es aber schon unter (4) gezählt); vermehrt um die Lösungen von

$$x^2 + 1 \equiv 0 \;(\mathrm{mod}.\,p^3)\; x = 1, 2, \ldots, A,$$

usw.

Also

$$e_i = \sum_{K=1}^{R} e_i^{(K)}$$

wenn $e_i^{(K)}$ die Lösungszahl von $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^k}$ bedeutet.

Nach Hilfssatz 5 ist

$$e_i^{(K)} < \frac{2A}{p^K} + 2,$$

daher

$$e_i < \sum_{K=1}^{\infty} \frac{2A}{p^K} + \sum_{K=1}^{R} 2 = \frac{2A}{p} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p}} + 2R = \frac{2A}{p-1} + 2R.$$

Für R folgt aus

$$p^R \leqq A^2 + 1$$

$$R \leqq 2 \frac{\log A}{\log p} + o\left(\frac{\log A}{\log p}\right)$$

und damit

$$e_i \leqq \frac{2A}{p-1} + 4 \frac{\log A}{\log p} + o\left(\frac{\log A}{\log p}\right).$$

Setzt man in (3) ein, so kommt

$$\log \prod_{p \leqq f(A)} p_i^{e_i} < e_1 \log 2 + \sum_{p \leqq f(A)} \left(\frac{2A \log p}{p-1} + 4 \log A\right) + o(\Sigma 4 \log A)$$

und nach Hilfssatz 4

$$\log \prod_{p \leqq f(A)} p_i^{e_i} < e_1 \log 2 + 2A \tfrac{1}{2} \log f(A) + 4 \log A \frac{f(A)}{2 \log f(A)} + o(A \log A).$$

Man beachte $f(A) = o(A \,.\, \log A)$ und erhält weiter

$$\log \prod_{p \leqq f(A)} p_i^{e_i} < e_1 \log 2 + A \log A + o(A \log A).$$

Da -1 quadratischer Nichtrest von 4 ist, wird auch $e_1 = \frac{2A}{2} + 2 =$

$= o(A \,.\, \log A)$, und (II) ist bewiesen.

Setzt man (I) und (II) in (2) ein, dann erhält man

$$\sum_{q_i > f(A)} \log q_i \geqq 2A \log A - A \log A = A \log A$$

und weiter gilt für die Anzahl n der q_i

$$n \cdot \log A^2 > \sum_{i=1}^{n} \log q_i \geqq A \log A,$$

$$n \geqq \frac{A}{2}.$$

Das ist genau Satz 1.

Noch eine Anwendung auf quadratische Reste: Bekannt ist: Für alle Primzahlen p besitzt die Kongruenz $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{.\, p}$ zwei Wurzeln, die absolut kleiner als $\frac{p}{2}$ sind. Nun gilt:

Für mindestens den $A/2 \log A$-ten Teil aller Primzahlen p besitzt die Kongruenz $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ zwei Wurzeln, die absolut kleiner als $p/\log^{1-\varepsilon} p$ sind ($\varepsilon > 0$).

Beweis: Nach den obigen Sätzen gibt es im Intervall $1 \leqq x \leqq A$ mindestens $A/2$ Zahlen x, für die

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{.\, p},\ p > f(A) = A \log^{1-\varepsilon} A$$

gilt. Also ist

$$\frac{p}{\log^{1-\varepsilon} p} \geqq A \geqq x.$$

Es können aber nicht zwei x zur selben Primzahl gehören. Andererseits ist die Gesamtzahl Π der Primzahlen $< A^2 + 1$

$$\Pi = \frac{A^2}{4 \log A}.$$

Beitrag zur Multiplikation unendlicher Reihen.

Von
L. Schmetterer, Wien.

(Eingelangt am 10. März 1950.)

1. Die vorliegende Note beschränkt sich im wesentlichen auf die Behandlung der sogenannten Cauchyschen Produktbildung unendlicher Reihen, obwohl es Analoga für andere gebräuchliche Multiplikationen unendlicher Reihen gibt. Abgesehen von den klassischen Sätzen von Cauchy, Abel, Mertens und Cesaro für einfache Reihen, liegen für diesen Fall interessante Ergebnisse von Hardy[1, 2], Rosenblatt[3] und Neder[4] vor. Es soll nun zunächst das Ergebnis der unter 3 genannten Arbeit verallgemeinert werden, und zwar so, daß bei geeigneter Interpretation auch alle anderen Ergebnisse abgelesen werden können, ausgenommen der von Hardy in 2 gegebene Satz.

2. Wir betrachten o. B. d. A. durchaus Reihen mit relleen Gliedern. Es soll ein- für allemal folgende Bezeichnung eingeführt werden: $\sum_0^\infty a_k$, $\sum_0^\infty b_k$ seien formal gegebene Reihen. Sei $c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l\, b_{k-l}$. Dann soll $\sum_0^\infty c_k$ die formale Cauchysche Produktreihe der Reihen $\Sigma\, a_k$ und $\Sigma\, b_k$ genannt werden. Weiter sei $A_n = A_n^{(0)} = \sum_0^n a_k$ und $A_n^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+r-1}{r-1} A_\nu^{(0)}$ für $r > -1$. Falls die Reihe $\sum_0^\infty a_k$ konvergiert oder in einem Sinne summierbar ist, soll der Grenzwert immer mit A bezeichnet werden. $\sum_0^\infty a_k = A$ $(C\,r)$ heißt natürlich, daß die Reihe zum Grenzwert A $(C\,r)$ — summierbar ist. Analoge Bedeutungen entsprechen natürlich $B_n^{(0)}$, $B_n^{(r)}$, B, C_n, $C_n^{(r)}$, C usw. Wir treffen noch die folgende selbstverständliche Vereinbarung:

---

[1] *Hardy*, Proc. London Mat. Soc. (2), 6 (1908), p. 410—23.
[2] *Hardy*, Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 40 (1944), p. 251—252.
[3] *Rosenblatt*, Bulletin internat. de l'Acad. pol. (Cracovie) (1913), p. 603—31.
[4] *Neder*, Proc. London Math. Soc. 23 (1923), p. 172—84.

Wenn die untere Grenze einer Summe nicht ganz ist, gilt diese als von der nächst größeren ganzen Zahl an erstreckt, für die obere Grenze als bis zur nächst kleineren ganzen Zahl. Wir zeigen nun den

Satz 1: Sei $\sum_{0}^{\infty} a_k = A\,(C\,r)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = B\,(C\,s)$, $r > 0$, $s > 0$. Dann ist $\sum_{0}^{\infty} c_k = C = AB\,(C\,s + r)$, wenn die Bedingungen

$$\sum_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{|A_m^{(r-1)}|}{m^r} = O(1), \quad \sum_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{|B_n^{(s-1)}|}{n^s} = O(1) \tag{1}$$

erfüllt sind.

Ehe wir an den Beweis herangehen, bemerken wir, daß die Bedingungen (1), z. B. für $A_m^{(r-1)} = O(m^{r-1})$ und $B_n^{(s-1)} = O(n^{s-1})$ erfüllt sind, so daß man den Satz von Rosenblatt erhält. Der Fall $r = s = 0$ ist zwar nicht unmittelbar mit einbegriffen, doch kann man Satz und Beweis leicht so interpretieren, daß man die Ergebnisse von Hardy-Neder erhält.

Beweis:

Es ist zu zeigen: $\dfrac{C_n^{(r+s)}}{\binom{r+s+n}{r+s}} \longrightarrow C.$

Wir setzen zunächst $A = B = 0$ voraus. O. B. d. A. sei n gerade.

$$C_{2n}^{(r+s)} = \sum_{k=0}^{2n} (A_0^{(r-1)} B_k^{(s-1)} + \ldots + A_k^{(r-1)} B_0^{(s-1)}) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(r-1)} \sum_{k=0}^{n} B_k^{(s-1)} +$$

$$+ \sum_{l=n+1}^{2n} B_{2n-l}^{(s-1)} \sum_{k=n+1}^{l} A_k^{(r-1)} + \sum_{k=n+1}^{2n} B_k^{(s-1)} \sum_{l=k}^{2n} A_{2n-l}^{(r-1)} = I + II + III.$$

Für I hat man: $I = A_n^{(r)} \cdot B_n^{(s)} = o(n^r)\, o(n^s) = o(n^{r+s})$ wegen $A = B = 0$.

ξ sei $\equiv\!\!\!\!\!| \equiv 0$ (1), positiv und zunächst beliebig.

$$II = \sum_{l=2n-\xi}^{2n} B_{2n-l}^{(s-1)} \sum_{n+1}^{l} A_k^{(r-1)} + \sum_{k=n+1}^{2n-\xi} A_k^{(r-1)} k^{-r} k^r \sum_{l=k}^{2n-\xi} B_{2n-l}^{(s-1)} =$$

$$= O(\xi)\, o(n^r) + O(n^r) \sum_{k=n+1}^{2n-\xi} A_k^{(r-1)} k^{-r} \sum_{l=k}^{2n-\xi} B_{2n-l}^{(s-1)} =$$

$= o(n^{r+s}) + o(n^s)\, O(n^r)\, O(1) = o(n^{r+s})$, wenn man im ersten Summanden ξ festhält, (1) beachtet sowie $A = B = 0$.

III ist ganz analog abzuschätzen, so daß man insgesamt erhält:

$$C_n^{(r+s)} = o(n^{r+s}).$$

Sei nun $A \neq 0$, $B \neq 0$. Dann ist

$$\overline{A}_n^{(r)} = A_n^{(r)} - \binom{n+r}{r} A = o(n^r) \qquad (2')$$

$$\overline{B}_n^{(s)} = B_n^{(s)} - \binom{n+s}{s} B = o(n^s) \qquad (2'')$$

Aus $\sum_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{|A^{(r-1)}|}{m^r} = O(1)$ folgt aber $\sum_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{|\overline{A}^{(r-1)}|}{m^r} \leqq \sum_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{|A^{(r-1)}|}{m^r} +$

$$+ \sum_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{\binom{m+r-1}{r-1} |A|}{m^r} = O(1) + O\left(\sum_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{1}{m}\right) = O(1)$$

und natürlich analog für $\overline{B}_m^{(s-1)}$. Man kann also wie eben zeigen:

$$\overline{C}_n^{(r+1)} = \sum_{k=0}^{n} (\overline{A}_0^{(r-1)} \overline{B}_k^{(s-1)} + \ldots + \overline{B}_0^{(s-1)} \overline{A}_k^{(r-1)}) = o(n^{r+s}).$$

Nunmehr hat man gemäß (2′) und (2″) einzusetzen und zu beachten, daß aus

$$\frac{B_0^{(s-1)} + \ldots + B_n^{(s-1)}}{\binom{n+s}{s}} \longrightarrow B \text{ auch}$$

$$\frac{B_0^{(s-1)} \binom{n+r}{r} + B_1^{(s-1)} \binom{n+n-1}{r} + \ldots + B_n^{(s-1)} \binom{r}{r}}{\binom{n+r+s}{r+s}} \longrightarrow B$$

folgt und eine sinngemäß ähnliche Relation gilt auch für $A_k^{(r-1)}$. Dies gibt insgesamt

$$\frac{C_n^{(r+s)}}{\binom{n+r+s}{r+s}} = \frac{\sum_{0}^{n} (A_0^{(r-1)} B_k^{(s-1)} + \ldots + A_k^{(r-1)} B_0^{(s-1)})}{\binom{n+r+s}{r+s}} \longrightarrow C = AB.$$

Es versteht sich von selbst, daß Satz 1 nach dem üblichen Schema eine Ausdehnung des Satzes von Rosenblatt auf „einseitige" Bedingungen erlaubt. Wenn etwa $A_m^{(r-1)} > -Km^{r-1}$, dann hat man nur $A_m^{(r-1)} = {}^{+}A_m^{(r-1)} - {}^{-}A_m^{(r-1)}$ mit

$${}^{+}A_m^{(r-1)} = \begin{cases} 0 & A_m^{(r-1)} < 0 \\ A_m^{(r-1)} & A_m^{(s-1)} \geqq 0 \end{cases} \qquad {}^{-}A_m^{(r-1)} = \begin{cases} 0 & A_m^{(r-1)} > 0 \\ -A_m^{(r-1)} & A_m^{(r-1)} < 0 \end{cases}$$

zu setzen und hat dann sofort

$$\sum_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{|A_m^{(r-1)}|}{m^r} = O(x^{-r}) \left(\left| \sum_{\frac{x}{2}}^{x} A_m^{(r-1)} \right| + 2 \left| \sum_{\frac{x}{2}}^{x} {}^{-}A_m^{(r-1)} \right| \right) =$$

$$= O(x^{-r}) O(x^r) + O(x^{-r}) O\left(\sum_{\frac{x}{2}}^{x} (m^{r-1})\right) = O(1).$$

3. Hardy[5] hat in seinem Buche über divergente Reihen, welches 1949 erschienen ist, den Begriff der Fourierschen Multiplikation eingeführt, welcher eine im Hinblick auf die formale Multiplikation Fourierscher Reihen gerader Funktionen wichtige Ausdehnung der Cauchyschen Produktbildung darstelt. Da wir die Definition benötigen, geben wir sie gleich hier: $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k$ seien beidseitig unendlich Reihen. Mit der Bezeichnung $a_m + a_{-m} = \alpha_m$, $b_m + b_{-m} = \beta_m$ ($\alpha_m = \alpha_{-m}, \beta_m = \beta_{-m}$) bilde man formal $\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_1^\infty \alpha_m$, $\frac{1}{2}\beta_0 + \sum_1^\infty \beta_m$ und hieraus

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_p = \frac{1}{2}\gamma_0 + \sum_1^\infty \gamma_p, \text{ wobei}$$

$$\gamma_p = \frac{1}{2}\alpha_0\beta_p + \frac{1}{2}\sum_1^\infty \alpha_m(\beta_{m-p} + \beta_{m+p}), \quad c_p = \frac{1}{2}\sum_{m \pm n = p} a_m b_n$$

$$\sum_{-\infty}^{-\infty} c_p = \frac{1}{2}\gamma_0 + \sum_1^\infty \gamma_p$$

ist formal das Resultat der Fourierschen Produktbildung. (Hier ist offenbar bei gegebenen Folgen a_k, b_k ($k = 0, \pm 1, \ldots$) nicht einmal die Definition der c_n notwendig sinnvoll). Es sei hier erwähnt, daß der Verf. der vorliegenden Note, diesen Begriff in einer am 1. Juni 1948 den Monatsheften für Mathematik[6] eingereichten Arbeit für den Spezialfall der Fourierreihen eingeführt hat und daß Satz 7 dieser Arbeit genau Hardys Satz 192 ist. Die in der Arbeit angeführten Voraussetzungen bezüglich des Verhaltens der die Fourierreihen erzeugenden Funktionen sind eine selbstverständliche Folge der Beschränkung auf Fourierreihen. Hardy[5] hat gezeigt, daß sich der unter 1 zitierte Satz, welcher von $a_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$, $b_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ auf die Konvergenz der Cauchyschen Produktreihe schließen läßt auch auf die Fouriersche Produktbildung übertragen läßt. Wir wollen einen weiteren Satz über Fouriersche Multiplikation zeigen.

---

[5] *Hardy*, Divergent Series, Oxford 1949, Kapitel X.

[6] *Schmetterer*, Monatshefte für Math. 53 (1949), p. 53—62. — Wir nehmen dies zum Anlaß, um eine Reihe von nicht sinnstörenden Druckfehlern zu korrigieren: S. 60, 11. Z. v. o. ist „eigentlich" durch „eigentümlich" zu ersetzen. S. 60, 8. Z. v. u. ist $f(x_0\, t)$ durch $f(x_0 - t)$ zu ersetzen. S. 61, letzte Z. soll es „Satz 8" statt „Satz 7" heißen. S. 57 letzte Z. ergänze: O. B. d. A. $A > 0$.

Hiezu brauchen wir den entsprechenden sehr einfachen Satz für die Cauchysche Multiplikation, wobei wir auf die allgemeinste Formulierung verzichten.

Satz 2: $\sum_0^\infty a_k$, $\sum_0^\infty b_k$ seien konvergent und es sei überdies

$$A_n - A = o(n^{-\alpha}) \tag{3}$$

$$b_m = O(m^{-\beta}) \tag{4}$$

wobei die Beziehung besteht:

$$\alpha + \beta \geqq 1. \tag{5}$$

Dann ist die Cauchysche Produkreihe $\sum_0^\infty c_n$ konvergent.

Beweis:

Aus der Definition folgt unmittelbar:

$$C_n - B_n A = \sum_0^n b_k (A_{n-k} - A) = \sum_{k=0}^{n-x} + \sum_{n-x}^{n} = I + II.$$

$II = O\left(\frac{x}{(n-x)^\beta}\right)$. $O(1)$ wegen (4), also bei festem $x < n$ durch Wahl von $n = o(1)$.

$$I = o\left(\sum_1^n \frac{1}{k^\beta} \frac{1}{(n-k)^\alpha}\right) = o\left(\int_0^n (x^{-\beta}(n-x)^{-\alpha})\, dx\right) =$$

$$= o\left(n^{1-\alpha-\beta} \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\right) = o(1)$$

durch Wahl von x unter Beachtung von (5), sowie erlaubte Beschränkung auf $\alpha < 1$, $\beta < 1$.

Einfache Beispiele zeigen sofort, daß man o in (3) nicht durch O ersetzen darf. ($a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$). Hardy-Littlewood[7] haben gezeigt, daß man im Falle $\alpha < 1$, $\beta < 1$, der im Wesentlichen interessiert A_n nicht durch a_n ersetzen kann. (Wobei man $A = 0$ setze) Nun ist es nicht schwer, den angekündigten Satz für die Fouriermultiplikation zu zeigen:

Satz 3: $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_m$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_m$ seien konvergente Reihen, worunter verstanden werden soll:

---

[7] *Hardy-Littlewood*, Proc. London Math. Soc. 11 (1912), p. 464—6.

$$|\sum_{-n}^{n} a_m - A| < \varepsilon, \; |\sum_{-l}^{l} b_m - B| < \varepsilon \text{ für } n > n(\varepsilon), \text{ bzw. } l > l(\varepsilon).$$

Es sei sogar:

$$|\sum_{n}^{n} a_m - A| = O(n^{-\alpha}) \tag{6}$$

und

$$b_m = O(|m|^{-\beta}) \tag{7}$$

mit

$$\alpha + \beta > 1. \tag{8}$$

Dann ist $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_m$ im eben erklärten Sinne konvergent gegen AB, wobei nach Definition $c_m = \frac{1}{2} \sum_{r \pm s = m} a_r b_s$.

Beweis:

Zunächst hat man die Konvergenz der Reihe $\gamma_p = c_p + c_{-p} = \frac{1}{2}\alpha_0 \beta_p + \sum_{1}^{\infty} \alpha_m (\beta_{m-p} + \beta_{m+p})$ zu untersuchen.

Sei $\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{1}^{k} \alpha_m = \mathfrak{A}_k$. Dann ist

$$|\sum_{m=k}^{l} \alpha_m (\beta_{m-p} + \beta_{m+p})| = |\sum_{m=k}^{l-1} [(\mathfrak{A}_m - A) - (\mathfrak{A}_{k-1} - A)] (\beta_{m-p} +$$

$$+ \beta_{m+p} - \beta_{m+1-p} - \beta_{m+1+p}) + (\mathfrak{A}_l - \mathfrak{A}_{k-1})(\beta_{l-p} + \beta_{l+p})| =$$

$$= O\left(\sum_{m=k}^{l-1} \frac{1}{m^{\alpha+\beta}}\right) + o\left(\frac{1}{k^\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{k^\alpha (l-p)^\beta}\right) = o(1) \text{ für jedes}$$

feste p durch Wahl von k und l.

Es ist

$$C_r = \sum_{-r}^{r} c_p = \frac{1}{2} \sum_{|m \pm n| \leqq r} a_m b_n = \frac{1}{4} \sum_{|m+n| \leqq r} \alpha_m \beta_n$$

$$\sum_{|m+n| \leqq r} \alpha_m \beta_n = \sum_{|m|+|n| \leqq r} + \sum_{\substack{|m+n| \leqq r \\ m-n > r}} + \sum_{\substack{|m+n| \leqq r \\ m-n < -r}} = I + II + III.$$

I strebt gegen $4AB$ wegen Satz 2 und weil α_m und β_n gerade Funktionen von m, bzw. n sind.

$$II = \sum_{m=1}^{r} \alpha_m \sum_{n=r-m+1}^{m+r} \beta_n + \sum_{m=r+1}^{\infty} \alpha_m \sum_{n=m-r}^{m+r} \beta_n = \lim_{s \to \infty} [-\sum_{i=1}^{r-1} (\mathfrak{A}_i - A)(\beta_{r-i} +$$

$$+ \beta_{r+i+1}) + (\mathfrak{A}_r - A) \sum_{n=1}^{2r} \beta_n + \sum_{i=r+1}^{r+s-1} (\mathfrak{A}_i - \mathfrak{A}_r)(\beta_{i-r} - \beta_{r+i+1}) +$$

$$+(\mathfrak{A}_{r+s}-\mathfrak{A}_r)\sum_{i=s}^{2r+s}\beta_i+(A-\frac{1}{2}\alpha_0)(\beta_r+\beta_{r+1})].$$

Die Summen in der eckigen Klammer seien: $II_1+II_2+II_3+II_4+II_5$.

$II_1=O(\sum_1^r \frac{1}{i^\alpha}\frac{1}{(r-i)^\beta})=O(\frac{1}{r^{\alpha+\beta-1}})=o(1)$ wegen (6), (7) und (8).

$$II_2=o(1)O(1)=o(1).$$

$$II_3+II_4=O(\sum_{i=1}^{s-1}\frac{1}{(r+i)^\alpha}\frac{1}{i^\beta})+O(\frac{1}{(r+s)^\alpha})\,o(1)-(\mathfrak{A}_r-A)\sum_1^{2r+1}\beta_n=$$

$$=O(\sum_{i=1}^{r-1}\frac{1}{(r+i)^\alpha}\frac{1}{i^\beta})+O(\sum_{i=r}^{s-1}\frac{1}{(r+i)^\alpha}\cdot\frac{1}{i^\delta})+o(1)+O(r^{-\alpha})O(1)=$$

$=o(1)$ und ebenso $II_5=O(1)O(r^{-\beta})=o(1)$.

Die Abschätzung von III gestaltet sich ebenso.

Wir heben eine Folgerung hervor:

Corollar 1: $f(x)$, $g(x)$ seien 2 L-integrierbare, periodische Funktionen und gerade. f gehöre der Klasse Lip α mit $\alpha<1$ an, $g(x)$ besitze eine in x_0 konvergente Fourierentwicklung und gehöre Lip (δ, p) an. Dann ist die Fourierreihe von $f.g$ an der Stelle x_0 konvergent, falls $\alpha+\delta>1$, $p\geqq 1$.

Beweis:

Bekanntlich konvergiert die Fourierreihe von f an der Stelle x_0 und man hat $|f(x_0)-s_n(x_0)|=O(\frac{\log n}{n^\alpha})$[8], also auch $O(n^{-\alpha'})$ mit $\alpha'<\alpha<1$

Für den n-ten Fourierkoeffizienten von $g(x)$ gilt $a_n=O(n^{-\delta})$[9], somit wegen Satz 3 Corollar 1.

Satz 3 gestattet nicht die schärfere Formulierung des Satzes 2. Hiezu sei etwa $\alpha_m=\frac{(-1)^m}{\sqrt{m}}$, $\beta_m=\frac{(-1)^m}{\sqrt{m}\log(m+1)}$, $m=1, 2, \ldots$, $\alpha_0=\beta_0=o$.

---

[8] Vgl. *Tonelli*, Serie trigonometriche, $s_n(x)$ ist natürlich die n-te Partialsumme der Fourierreihe von $f(x)$. Bologna 1928, p. 326.

[9] *Hardy-Littlewood*, Math. Zeitschrift 28 (1928), insb. p. 619. — Da die Fourierreihe einer Funktion $f(x)\subset$ Lip α mit $\alpha>1/2$ absolut konvergiert, sagt Corollar 1 natürlich erst für $\alpha<1/2$ etwas Neues aus.

$$\left|\sum_{m=1}^{n} a_m(\beta_{m-p}+\beta_{m+p})\right| = \left|\sum_{m=1}^{p-1}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{1}{\sqrt{p-m}\log(p-m+1)}+\right.$$

$$+\sum_{p+1}^{n}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{1}{\sqrt{m-p}\log(m+1-p)}+\sum_{1}^{n}\frac{1}{\sqrt{m}}\left.\frac{1}{\sqrt{m+p}\log(m+p+1)}\right| \geqq$$

$$\geqq \left|\sum_{1}^{n}\frac{1}{(m+p)\log(m+1+p)}\right|,$$

also kann γ_p nicht definiert werden.

Hardy hat in der unter 2 genannten Arbeit gezeigt, daß neben der Konvergenz von $\sum_0^\infty a_m$, $\sum_0^\infty b_n$, $a_m = O(m^{-\delta})$ $(\delta > 0)$, $b_n = O\left(\frac{1}{n\log n}\right)$ eine hinreichende Konvergenzbedingung für die Cauchysche Produktreihe ist. Dies kann deswegen besonderes Interesse beanspruchen, weil bis dahin nur Sätze dieser Art bekannt waren, welche a_m und b_n „symmetrische" Bedingungen auferlegen. Wir zeigen, daß sich das Hardysche Ergebnis auf die Fouriersche Multiplikation übertragen läßt, genauer den

Satz 4: $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_m$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} b$ seien in dem oben erklärten Sinne konvergent gegen A, bzw. B. Ferner sei

$$a_m = O(|m|^{-\delta}) \text{ für irgendein } \delta > 0. \tag{9}$$

$$b_n = O\left(\frac{1}{|n|\log|n|}\right) \tag{10}$$

Dann ist die Fouriersche Produktreihe konvergent gegen AB.

Beweis:

$$4C_r = 4\sum_{-r}^{r} C_p = \sum_{|m+n|\leqq r} a_m\beta_n = \sum_{|m|+|n|\leqq r} + \sum_{\substack{|m+n|\leqq r\\ m-n>r}} + \sum_{\substack{|m+n|\leqq r\\ m-n<-r}} = I + II + III.$$

$I \longrightarrow 4AB$, weil wie eben erwähnt, der Satz 4 für die Cauchysche Multiplikation richtig ist.

Es bleibt zu zeigen: $II = o(1)$, $III = o(1)$.

$$II = \sum_{m=1}^{r} a_m \sum_{n=r-m+1}^{m+r}\beta_n + \sum_{m=r+1}^{\infty} a_m \sum_{n=m-r}^{m+r}\beta_n = II_1 + II_2.$$

Wir bezeichnen mit $\xi \Vdash 0$ (1) eine noch näher zu bestimmende positive Zahl $< r$, analoge Bedeutung habe η. O. B. d. A. sei $a_0 = 0$ und $\mathfrak{A}_i = \sum_1^i a_k$.

$$II_1 = \sum_{m=1}^{\xi} \mathfrak{A}_i\,(-\beta_{r-i}-\beta_{r+i+1}) + \sum_{\xi}^{r-r^\delta} (\mathfrak{A}_i - A)\,(-\beta_{r-i}-\beta_{r+i+1}) +$$

$$+(\mathfrak{A}_{[r-r^\delta]+1} - A) \sum_{r^\delta}^{2r-r^\delta+1} \beta_i - A \sum_{i=r-\xi}^{r+\xi+1} \beta_i + \sum_{r-r^\delta+1}^{r-\eta} \alpha_m \sum_{n=r-m+1}^{m+r} \beta_n + \sum_{m=r-n}^{r} \alpha_m \sum_{n=r-m+1}^{m+r} \beta_n =$$

$$= II_{11} + II_{12} + II_{13} + II_{14} + II_{15} + II_{16}.$$

$II_{11} = O(\xi)\,O\left(\frac{1}{(r-\xi)\log(r-\xi)}\right) = o(1)$ bei festem ξ durch Wahl von r wegen (10).

Es wird

$$II_{12} = o(1)\,O\left(\sum_{i=r^\delta}^{r-\xi} \frac{1}{i \log i}\right) = o(1)\,O(\text{loglogr-loglogr}^\delta) = o(1)\,O(1)$$

$= o(1)$ durch Wahl von ξ und wegen (10).

$II_{14} = o(1)$ bei festem ξ, da $\sum_0^\infty \beta_i$ konvergiert. Ebenso ist $II_{13} = o(1)$.

$$II_{15} = o(1)\,O\left(\sum_{i=r-r^\delta}^{r} \frac{1}{i^\delta}\right) = o(1)\,O(1) = o(1)$$ durch Wahl von η und wegen (9).

$II_{16} = o\left(\frac{1}{(r-\eta)^\delta}\right) O(\eta) = o(1)$ bei festem η durch Wahl von r.

$$II_2 = \sum_{m=r+1}^{r+\zeta} \alpha_m \sum_{n=m-r}^{m+r} \beta_n + \sum_{r+\zeta}^{r+r^\delta} \alpha_m \sum_{m-r}^{m+r} \beta_n + \sum_{r+r^\delta}^{r+r^{\frac{1}{\delta}}} (\mathfrak{A}_i - \mathfrak{A}_{[r+r^\delta]})\,(\beta_{i-r}-\beta_{i+r}) +$$

$$+(\mathfrak{A}_{[r+r^{\frac{1}{\delta}}]+1} - \mathfrak{A}_{[r+r^\delta]}) \sum_{r^{\frac{1}{\delta}}}^{2r+r^{\frac{1}{\delta}}+1} \beta_i + \sum_{r+r^{\frac{1}{\delta}}+1}^{\infty} \alpha_m \sum_{n=m-r}^{m+r} \beta_n =$$

$$= II_{21} + II_{22} + I_{23} + II_{24} + II_{25}$$

ζ hat hiebei eine sinngemäß ähnliche Bedeutung wie ξ und η.

$$II_{21} = O(\zeta)\,O\left(\frac{1}{r^\delta}\right) = o(1).$$

$$II_{22} = o(1)\,O\left(\sum_{i=r}^{r+r^\delta} i^{-\delta}\right) = o(1)\,O(1)$$ durch Wahl von ζ und wegen (9).

$$II_{23} = o(1)\, O\left(\sum_{r^{\delta}}^{r^{\frac{1}{\delta}}} \frac{1}{i \log i}\right) = o(1)\, O\left(\log\log r^{\frac{1}{\delta}} - \log\log r^{\delta}\right) = o(1)\, O(1) = o(1).$$

$$II_{25} = O\left(\sum_{r+r^{\frac{1}{\delta}}}^{\infty} \frac{1}{s^{\delta}} \frac{r}{(s-r)\log(s-r)}\right) = O(r)\, o\left(\sum_{r^{\frac{1}{\delta}}}^{\infty} \frac{1}{s^{1+\delta}}\right) =$$

$$= O(r)\, o(r^{-1}) = o(1);$$

$$II_{24} = o(1)\, o(1) = o(1).$$

III wird analog abgeschätzt. Damit ist der Satz bewiesen.

4. Unser nächstes Ziel ist es, die obigen Fragestellungen für einfache Reihen auf Doppelreihen zu übertragen. Die Verhältnisse liegen hier wesentlich anders, was bei zu Grundelegung des Pringsheimschen Konvergenzbegriffes zum Teil aus der Tatsache folgt, daß die Konvergenz einer Doppelreihe keineswegs die Beschränktheit aller Teilsummen impliziert. Sätze über das Konvergenzverhalten der Cauchyschen Produktreihe für Doppelreihen im Pringsheimschen Sinne sind mir nur in geringer Anzahl bekannt. Ehe wir darauf eingehen, geben wir die Definition: $\sum_{m,n=0,0}^{\infty,\infty} a_{m\,n}$, $\sum_{m,n=0,0}^{\infty,\infty} b_{m\,n}$ seien zwei Doppelreihen. Die Reihe $\sum_{0,0}^{\infty,\infty} c_{kl}$ heißt das formale Cauchysche Produkt der beiden gegebenen Reihen, wenn $c_{kl} = \sum_{u+w=k}^{v+z=l} a_{u\,v}\, b_{w\,z}$. Die Übertragung des klassischen Cauchyschen Satzes ist trivial. Hardy[10] hat unter der Voraussetzung, daß *alle* Partialsummen von $\sum_{0,0}^{\infty} a_{m,n}$, $\sum_{0,0}^{\infty} b_{m,n}$ beschränkt sind, das Analogon zum Abelschen Satze bewiesen. Die Verallgemeinerung des Mertensschen Satzes ebenfalls unter der Bedingung der „Endlichkeit" verdankt man einer neueren Arbeit von Sheffer[11]. Auch die Frage der C-Summierbarkeit der Cauchyschen Produktreihe liegt für Doppelreihen keineswegs an der Oberfläche. Diesbezüglich ist mir insbesondere eine interessante Arbeit von Cesari bekannt[12], worin unter Zugrundelegung des Begriffes der restringierten C-Summierbarkeit ein schöner Satz über die Cauchysche Produktreihe bewiesen wird. Es scheint keine Arbeiten zu

[10] *Hardy-Bromwich*, Proc. London Math. Soc. (2) II (1905), p. 188—89.
[11] *Sheffer*, Bull. of the Amer. Math. Soc. 62 (1946), p. 1036—41.
[12] *Cesari*, Annali di Pisa (2), 12 (1943), p. 189—204.

geben, welche aus der Größenordnung der Reihenglieder auf das Konvergenzverhalten der Produktreihe schließen. Es soll hier gezeigt werden, daß man diesbezügliche Sätze aufstellen kann, welche jedoch nicht unmittelbar mit den Ergebnissen für einfache Reihen verglichen werden können.

Wir zeigen zunächst den

Satz 5: $\sum_{0,0}^{\infty} a_{m\,n}$ und $\sum_{0,0}^{\infty} b_{m\,n}$ seien konvergente Reihen, d. h.

$|A_{m\,n} - A| < \varepsilon \quad m > m(\varepsilon), \quad n > n(\varepsilon)$ und ebenso

$$|(B_{kl} - B)| < \varepsilon \qquad k, l > k(\varepsilon), l(\varepsilon).$$

Hiebei bedeutet natürlich $A_{m\,n} = \sum_{k,l=0,0}^{m,n} a_{kl}$ und entsprechend $B_{kl} = \sum_{0,0}^{k,l} b_{rs}$.

Ferner soll gelten

$$|a_{m\,n}| < \frac{K_a}{m^2 + n^2} \tag{11}$$

$$|b_{m\,n}| < \frac{K_b}{m^2 + n^2} \tag{12}$$

für $m = 0, 1, \ldots, n = 0, 1, \ldots \; m^2 + n^2 \neq 0$.

Dann konvergiert die Cauchysche Produktreihe

$$\sum_{m,n=0,0}^{m,n=k,l} c_{m,n} = C_{kl} = \sum_{\substack{0 \leqq u+w \leqq k \\ 0 \leqq v+z \leqq l}} a_{u\,v}\, b_{wz} \text{ gegen } AB = C \text{ für } k, l \longrightarrow \infty.$$

Beweis:

O. B. d. A. genügt es zu zeigen: $C_{2k,\,2l} = \sum_{\substack{0 \leqq u+w \leqq 2k \\ 0 \leqq v+z \leqq 2l}} a_{u\,v}\, b_{w\,z} \longrightarrow AB.$

Es ist $\sum_{\substack{0 \leqq u+w \leqq 2k \\ 0 \leqq v+z \leqq 2l}} a_{u\,v}\, b_{wz} = \sum_{\substack{0 \leqq u \leqq k \\ 0 \leqq v \leqq l}} a_{u\,v}\, b_{wz} + \sum_{\substack{0 \leqq u+w \leqq 2k \\ 0 \leqq v \leqq l-1 \\ l+1 \leqq z \leqq 2l-v}} a_{u\,v}\, b_{wz} +$

$$+ \sum_{\substack{0 \leqq u+w \leqq 2k \\ l+1 \leqq v \leqq 2l \\ 0 \leqq z \leqq 2l-v}} a_{u\,v}\, b_{wz} + \sum_{\substack{0 \leqq u \leqq k-1 \\ k+1 \leqq w \leqq 2k-u \\ 0 \leqq v \leqq l \\ 0 \leqq z \leqq l}} a_{u\,v}\, b_{wz} + \sum_{\substack{0 \leqq w \leqq 2k-u \\ 0 \leqq v \leqq l \\ k+1 \leqq u \leqq 2k \\ 0 \leqq z \leqq l}} a_{u\,v}\, b_{wz} = I + II + III +$$

$$+ IV + V$$

Offenbar hat man $I \longrightarrow AB$, so daß sich der Beweis reduziert auf den Nachweis von $II + III + IV + V \longrightarrow 0$ im Sinne der Definition des Doppellimes.

Wir betrachten zunächst II und wählen zwei positive Zahlen $\neq 0$ (1) $\xi_2 < 2k$, $\eta_2 < 2l$, deren passende Wahl wir uns vorbehalten.

$$II = \sum_{\substack{0 \leqq w \leqq 2k \\ l+1 \leqq z \leqq 2l}} b_{wz} A_{2k-w\,2l-z} = \sum_{\substack{0 \leqq w \leqq 2k-\xi_2 \\ l+1 \leqq z \leqq 2l-\eta_2}} + \sum_{\substack{0 \leqq w \leqq 2k \\ 2l-\eta_2 \leqq z \leqq 2l}} + \sum_{\substack{2k-\xi_2 \leqq w \leqq 2k \\ l+1 \leqq z \leqq 2l-\eta_2}} =$$
$$= II_1 + II_2 + II_3.$$

$$II_1 = A\,(B_{2k-\xi_2\,2l-\eta_2} - B_{2k-\xi_2 l}) + \sum_{\substack{0 \leqq w \leqq 2k-\xi_2 \\ l+1 \leqq z \leqq 2l-\eta_2}} b_{wz}\,(A_{2k-w\,2l-z} - A).$$

Der erste Summand ist $o\,(1)$[13] bei festem ξ_2, η_2 und passender Wahl von k und l.

Für den zweiten Summanden hat man $o\,(1)\,O\,(\sum_{\substack{0 \leqq w \leqq 2k-\xi_2 \\ l+1 \leqq z \leqq 2l-\eta_2}} \frac{1}{w^2+z^2}) =$

$= o\,(1)\,O\,(\sum_{l+1 \leqq z \leqq 2l-\eta_2} \frac{1}{z} \arctan \frac{2k-\xi_2}{z}) = o\,(1)\,O\,(\sum_{l+1}^{2l} \frac{1}{z}) = o\,(1)$ durch Wahl von ξ_2 und η_2, wegen (12).

Beachtet man, daß wegen (11)

$|\max_{\substack{0 \leqq w \leqq 2k \\ 2l-\eta_2 \leqq z \leqq 2l}} A_{2k-w\,2l-z}| = O\,(\sum_{0 \leqq z \leqq \eta_2} \frac{1}{z} \arctan \frac{2k}{z}) = O\,(\log \eta_2)$, dann wird

$$II_2 = O\,(\log \eta_2)\,O\,(\sum_{\substack{0 \leqq w \leqq 2k \\ 2l-\eta_2 \leqq z \leqq 2l}} \frac{1}{w^2+z^2}) = O\,(\log \eta_2)\,O\,(\sum_{2l-\eta_2 \leqq z \leqq 2l} \frac{1}{z}) =$$

$$= O\,(\log \eta_2)\,O\,(\frac{\eta_2}{2l-\eta_2}) = o\,(1)$$ bei festem η_2 durch Wahl von l.

Ebenso sieht man $II_3 = o\,(1)$, wobei ξ_2, η_2, sowie l und k die Rollen tauschen.

$III = \sum_{\substack{0 \leqq u \leqq 2k \\ l+1 \leqq v \leqq 2l}} a_{u\,v} B_{2k-u\,2l-v} = o\,(1)$, da ja im Vergleich zu II nur a_{uv} und b_{wz} vertauscht werden müssen.

$$IV = \sum_{\substack{k+1 \leqq w \leqq 2k \\ 0 \leqq z \leqq l}} b_{wz} A_{2k-wl} = \sum_{\substack{k+1 \leqq w \leqq 2k-\xi_4 \\ 0 \leqq z \leqq l}} b_{wz} A_{2k-wl} + \sum_{\substack{2k-\xi_4 \leqq w \leqq 2k \\ 0 \leqq z \leqq l}} b_{wz} A_{2k-wl} =$$
$$= IV_1 + IV_2.$$

$$IV_1 = A\,(B_{2k-\xi_4 l} - B_{kl}) + \sum_{\substack{k+1 \leqq w \leqq 2k-\xi_4 \\ 0 \leqq z \leqq l}} b_{wz}\,(A_{2k-wl} - A).$$

Der erste Summand ist $o\,(1)$ durch Wahl von k, l bei festem ξ_4.

Der zweite wird durch Wahl von ξ_4

---

[13] Die Symbolik o und 0 soll sinngemäß auch für Doppelfolgen Verwendung finden.

$$o(1)\,O\left(\sum_{l+1}^{2l-\xi_4}\frac{1}{w}\ \arctan\frac{2l}{w}\right)=o(1)\,O(1)=o(1).$$

Für IV_2 ergibt sich nach ganz ähnlicher Abschätzung wie für $II_2=o(1)$. Ganz ähnlich wie IV erledigt sich V, womit also alles gezeigt ist.

Die Fragestellung drängt sich von selbst auf, ob man die Bedingungen (11) und (12) nicht durch andere der Form

$$|a_{m\,n}|<\frac{K_a}{m\,n},\quad |b_{m\,n}|<\frac{K_b}{m\,n}$$

ersetzen kann. Wir zeigen, daß dies auch bei viel weitergehenden Bedingungen dieser Art nicht der Fall ist.

Wir wollen dies genauer in einem Satz zusammenfassen und behaupten:

Satz 6: Die Konvergenz von $\Sigma\, a_{m\,n}$ und $\Sigma\, b_{m\,n}$ im Pringheimschen Sinne, nebst den Bedingungen $mn^{\alpha}\, a_{m\,n}\longrightarrow 0$ und $m^{\beta}\, n^{\gamma}\, b_{m\,n}\longrightarrow 0$ bei festem m und $n\longrightarrow\infty$ und umgekehrt, wie auch im Sinne des Doppellimes sind nicht hinreichend für die Konvergenz der Cauchyschen Produktreihe, mögen auch α, β, γ beliebig große positive Zahlen sein.

Beweis:

Sei

$$a_{m\,n}=\begin{cases}\dfrac{1}{(m+1)\log(m+1)} & m=0,1,\ldots\quad n=0\\ -\dfrac{1}{(m+1)\log(m+1)} & m=0,1,\ldots\quad n=1\\ 0\ \text{sonst}\end{cases}\qquad(\log 1=1)$$

$$b_{m\,n}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{\gamma+\varepsilon}} & n=0,1,\ldots\quad m=0\\ \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{\gamma+\varepsilon}} & n=0,1,\ldots\quad m=1\\ 0\ \text{sonst}\end{cases}\qquad\varepsilon>0$$

Die hiedurch definierten Doppelreihen sind natürlich konvergent.

$$c_{kl}=\sum_{\substack{u+w=k\\ v+z=l}}a_{uv}\,b_{wz}=a_{k0}\,b_{0l}+a_{k1}\,b_{0\,l-1}+a_{k-1\,0}\,b_{1l}+a_{k-1\,l}\,b_{1\,l-1}.$$

$$c_{k\,l}=\left(\frac{1}{k\log k}+\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}\right)(-1)^l\frac{1}{l^{\gamma+\varepsilon}}+$$

$$+\left(\frac{1}{k\log k}+\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}\right)\frac{1}{(l+1)^{\gamma+\varepsilon}}\,(-1)^l$$

$$C_{rs} = \sum_{k,l=0,0}^{r,s} c_{kl} = \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{1}{k \log k} + \frac{1}{(k+1)\log(k+1)}\right)\left(\sum_{l=0}^{s} (-1)^l \frac{1}{l^{\gamma+\varepsilon}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=0}^{s} (-1)^l \frac{1}{(l+1)^{\gamma+\varepsilon}}\right) \sim \frac{\log\log r}{(s+1)^{\gamma+\varepsilon}} (-1)^s,$$

was Konvergenz ausschließt. Hiebei sind Glieder mit verschwindendem Nenner einfach 0 gesetzt, welche Vereinbarung bei der Definition der c_{kl} und C_{rs} etwas Schreibarbeit erspart.

Die Tatsache, daß z. B. $a_{m\,n}$ größenordnungsmäßig von $\frac{1}{m}$ nur linear abhängt, verhindert also schon die Konvergenz der Produktreihe, mögen die $b_{m\,n}$ auch noch so rasch gegen 0 gehen. Dies scheint es mir unmöglich zu machen, in dieser Richtung interessante Sätze über die (Pringsheimsche) Konvergenz der Cauchyschen Produktreihe zu machen.

In diesem Zusammenhange kann es als naheliegend bezeichnet werden, den Versuch zu machen, bei nicht allzuweit gehender Abänderung des Konvergenzbegriffes, die Konvergenz der Produktreihe im neuen Sinne sicherzustellen, wenn für die Glieder der Reihen $\Sigma a_{m\,n}$, $\Sigma b_{m\,n}$ Bedingungen der im Satz 6 genannten Art gültig sind. Hiezu ist vielleicht besonders geeignet der wohlbekannte Begriff der restringierten Konvergenz:

Eine Folge $s_{m\,n}$ heiße restringiert konvergent gegen s, wenn $|s_{m\,n} - s| < \varepsilon$ für $m > m(\varepsilon)$, $n > n(\varepsilon)$, wenn noch die Bedingung $\lambda < \frac{m}{n} < L$ für beliebige λ, $L > 0$ erfüllt ist.

Nunmehr wollen wir folgenden Satz beweisen:

Satz 7: $\sum_{0,0}^{\infty} a_{m\,n}$ und $\sum_{0,0}^{\infty} b_{m\,n}$ seien im Pringsheimschen Sinne oder nur restringiert konvergent gegen A, bzw. B. Es sei

$$|a_{m\,n}| < \frac{K_a}{(m+1)^{\alpha}(n+1)} \qquad \alpha > 1 \tag{13}$$

$$|b_{m\,n}| < \frac{K_b}{(m+1)(n+1)^{\beta}} \qquad \beta > 1 \tag{14}$$

Dann konvergiert die Cauchysche Produktreihe restringiert gegen $AB = C$.

Beweis:

Wir übernehmen aus dem Beweis des Satzes 5 die Zerlegung von $\sum_{\substack{0\leqq u+w\leqq 2k\\ 0\leqq v+z\leqq 2l}} a_{uv}\, b_{wz}$ in die 5 Teilsummen I, II, III, IV, V.

Man hat natürlich $I \longrightarrow AB$.

$$II = \sum_{\substack{0\leqq w\leqq 2k\\ l+1\leqq z\leqq 2l}} b_{wz}\, A_{2k-w\,2l-z} = \sum_{\substack{0\leqq w\leqq 2k-\xi_2\\ l+1\leqq z\leqq 2l-\eta_2}} + \sum_{\substack{0\leqq w\leqq 2k\\ 2l-\eta_2\leqq z\leqq 2l}} + \sum_{\substack{2k-\xi_2\leqq w\leqq 2k\\ l+1\leqq z\leqq 2l-\eta_2}} = II_1+II_2+II_3.$$

Alle auftretenden ξ, η haben die schon mehrfach erklärte Bedeutung.

$$II_1 = O(1)\, O\Big(\sum_{\substack{1\leqq w\leqq 2k\\ l\leqq z\leqq 2l}} \frac{1}{w}\,\frac{1}{z^\beta}\Big) = O(1)\, O(\log k)\, O(l^{1-\beta}) =$$

$= O(1)\, O(L.\log l\,.\, l^{1-\beta}) = o(1)$ für jedes beliebige feste $L>0$ durch Wahl von ξ_2 und η_2 und hinreichend großes l.

Es ist

$$\Big|\max_{\substack{0\leqq w\leqq 2k\\ 2l-\eta_2\leqq z\leqq 2l}} A_{2k-w\,2l-z}\Big| \leqq \sum_{0\leqq w\leqq 2k}^{0\leqq z\leqq \eta_2} |a_{wz}| = O(\log \eta_2).$$

$$II_2 = O(\log \eta_2)\, O(\log k)\, O(\eta_2 (2l-\eta_2)^{-\beta}) = O\Big(L.\log l\,\frac{\eta_2 \log \eta_2}{(2l-\eta_2)^\beta}\Big) =$$

$= o(1)$ für jedes beliebige, feste $L>0$, festgehaltenes η_2 und durch Wahl von l.

Für II_3 hat man zu beachten:

$\Big|\max_{\substack{2k-\xi_2\leqq w\leqq 2k\\ l+1\leqq z\leqq 2l-\eta_2}} A_{2k-w\,2l-z}\Big| \leqq \sum_{\substack{0\leqq w\leqq \xi\\ 0\leqq z\leqq l-1}} |a_{wz}| = O(\log l)$ wegen (13), also

$$II_3 = O(\log l)\, O\Big(\sum_{\substack{2k-\xi_2\leqq w\leqq 2k\\ l+1\leqq z\leqq 2l-\eta_2}} |b_{wz}|\Big) = O(\log l)\, O\Big(\frac{\xi_2}{2k-\xi_2}\Big)\, O(l^{1-\beta}) = o(1)$$

bei festem ξ_2 durch Wahl von k und l, wobei natürlich immer (13) oder (14) eingehen, was wir künftighin unterdrücken.

$$III = \sum_{\substack{0\leqq u\leqq 2k\\ l+1\leqq v\leqq 2l}} a_{uv}\, B_{2k-u\,2l-v} = \sum_{\substack{0\leqq u\leqq 2k-\xi_3\\ l+1\leqq v\leqq 2l-\eta_3}} + \sum_{\substack{0\leqq u\leqq 2k\\ 2l-\eta_3\leqq 0\leqq 2l}} + \sum_{\substack{2k-\xi_3\leqq u\leqq 2k\\ l+1\leqq v\leqq 2l-\eta_3}} = III_1+III_2+III_3$$

$$III_1 = B\,(A_{2k-\xi_3\,2l-\eta_3} - A_{2k-\xi_3 l}) + \sum_{\substack{0\leqq u\leqq 2k-\xi_3\\ l+1\leqq v\leqq 2l-\eta_3}} a_{uv}\,(B_{2k-u\,2l-v} - B).$$

Der erste Summand ist $o(1)$, der zweite $o(1)\, O\Big(\sum_{\substack{1\leqq u\leqq 2k\\ l\leqq v\leqq 2l}} \frac{1}{u^\alpha v}\Big) = o(1)$

durch Wahl von ξ_3 und η_3.

Es ist $|\max_{\substack{0\leqq u\leqq 2k\\ 2l-\eta_3\leqq v\leqq 2l}} B_{2k-u\,2l-v}| = O(\log k)$.

$$III_2 = O(\log k)\, O\Big(\sum_{\substack{0\leqq u\leqq 2k\\ 2l-\eta_3\leqq v\leqq 2l}} |a_{uv}|\Big) = O(\log k)\, O\Big(\sum_{2l-\eta_3}^{2l} \frac{1}{v}\Big) =$$

$$= O(L.\log l)\, O\Big(\frac{\eta_3}{2l-\eta_3}\Big) = o(1).$$

$III_3 = O(\log \xi_3)\, O(1)\, O\Big(\frac{\xi_3}{(2k-\xi_3)^\alpha}\Big) = o(1)$ bei festem ξ_3 durch Wahl von k.

$$IV = \sum_{\substack{k+1\leqq w\leqq 2k\\ 0\leqq z\leqq l}} b_{wz}\, A_{2k-w\,l} = \sum_{\substack{k+1\leqq w\leqq 2k-\xi_4\\ 0\leqq z\leqq l}} b_{wz}\, A_{2k-wl} + \sum_{\substack{2k-\xi_4\leqq w\leqq 2k\\ 0\leqq z\leqq l}} b_{wz}\, A_{2k-wl} =$$

$= IV_1 + IV_2$.

$$IV_1 = A\,(B_{2k-\xi_4\,l} - B_{kl}) + \sum_{\substack{k+1\leqq w\leqq 2k-\xi_4\\ 0\leqq z\leqq l}} b_{wz}\,(A_{2k-w\,l} - A) =$$

$$= o(1) + o(1)\; O\Big(\sum_{\substack{k+1\leqq w\leqq 2k-\xi_4\\ 0\leqq z\leqq l}} b_{wz}\Big) = o(1) + o(1).\; O\Big(\sum_{k}^{2k} \frac{1}{w}\Big) = o(1),$$

wenn man für den zweiten Summanden ξ_4 passend wählt und im ersten festhält und nun k und l hinreichend groß macht.

$$IV_2 = O(\log l)\; O\Big(\frac{\xi_4}{2k-\xi_4}\Big) = O\Big(\log \frac{k}{\lambda}\Big)\; O\Big(\frac{\xi_4}{2k-\xi_4}\Big) = o(1)$$ bei festem ξ_4 und beliebigem aber festen $\lambda > 0$ durch Wahl von k.

$$V = \sum_{\substack{k+1\leqq u\leqq 2k\\ 0\leqq v\leqq l}} a_{uv}\, B_{2k-u\,l} = \sum_{\substack{k+1\leqq u\leqq 2k-\xi_5\\ 0\leqq v\leqq l}} + \sum_{\substack{2k-\xi_5\leqq u\leqq 2k\\ 0\leqq v\leqq l}} = V_1 + V_2.$$

$$V_1 = O(1)\, O(\log l)\, O(k^{1-\alpha}) = O\Big(\log \frac{k}{\lambda}\Big)\, O(k^{1-\alpha}) = o(1).$$

$$V_2 = O(\log \xi_5)\; O\Big(\frac{\xi_5}{(2k-\xi_5)^\alpha}\Big) = o(1).$$

Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

Wir schließen noch einige Bemerkungen an. Es kann erwähnt werden, daß Satz 5, bzw. 7 keinerlei Aussage über die Beschränktheit aller Partialsummen der gegebenen Reihe benötigen. Sheffer hat in der unter

11 zitierten Arbeit gezeigt, daß in der Formulierung des Analogons des Mertensschen Satzes die Bedingung der Endlichkeit im allgemeinen nicht entbehrt werden kann. Dies zeigt auch das in Satz 6 herangezogene Beispiel, da man offenbar $\Sigma \mid b_{m\,n} \mid$ absolut konvergent wählen darf.

Es ist uns nicht gelungen, die Aussage des Satzes 7 auch noch für den Fall $\alpha = \beta = 1$ zu beweisen, aber auch die Konstruktion eines entsprechenden Gegenbeispieles war uns derzeit nicht möglich. Wir hoffen aber, darauf in Kürze zurückkommen zu können.

Zur Geometrie gewisser Glanzerscheinungen.

Von
W. Wunderlich, Wien.

Mit 2 Abbildungen.

(Eingelangt am 31. März 1950.)

I. Einleitung.

In dieser Arbeit sollen vom geometrischen Standpunkt aus gewisse Glanzphänomene betrachtet werden, die durch die Reflexion des von einer punktförmigen Quelle ausgehenden Lichtes an Systemen spiegelnder Linien hervorgerufen werden. Derartige Erscheinungen sind z. B. an blanken Metallteilen zu beobachten, welche von der Bearbeitung herrührende feine Rillen aufweisen, wie etwa kreisförmige Rillen als Spuren einer Herstellung auf der Drehbank. Für jede Rille sind es nur ganz bestimmte Stellen, die das Licht in das Auge des Betrachters reflektieren, und die Gesamtheit dieser Stellen verbindet sich zu einer kontinuierlich erscheinenden „*Glanzkurve*". Im Gegensatz hierzu würde eine vollkommen glatte Oberfläche im allgemeinen nur einzelne, diskret verteilte „Glanzpunkte" (Spiegelbilder der Lichtquelle) zeigen. Die erwähnte Glanzkurve geht übrigens sicherlich durch die Glanzpunkte, die auf der glatt gedachten Oberfläche auftreten würden.

Ähnliche Erscheinungen sind an den im Geometrieunterricht gebräuchlichen Drahtmodellen von Flächen festzustellen, bei welchen gewisse Flächenlinien durch blanke Metalldrähte materialisiert sind; besonders schön treten diese Glanzeffekte dann auf, wenn es sich um Modelle von Rotationsflächen handelt, die man in Drehung versetzt[1]. Auf zahlreiche, zum Teil recht alltägliche Objekte, die Gelegenheit zur Beobachtung solcher Glanzeffekte geben, wie Drahtgitter, rotierende

[1] Hübsche Aufnahmen solcher Glanzkurven auf einer Kugel und einem Torus mit Drahtmeridianen zeigt E. Papperitz in seinem Bericht „Über das Zeichnen im Raum", Jber. d. DMV. 20 (1911), 307—314, ohne jedoch näher darauf einzugehen.

Speichenräder, Schallplatten, gestriegelte Pferdeleiber, usw., weist W. H. Roever hin, der über diese Erscheinungen wiederholt mathematische Betrachtungen angestellt hat[2].

Gleichfalls hierher gehören die als „Asterismus" bezeichneten Eigenschaften gewisser Mineralien (z. B. Sternsaphir, Granat, Rosenquarz, Gips u. a.), die bei auf- oder durchfallendem Licht eigenartige, häufig sternförmig sich kreuzende Lichtbögen zeigen. Es handelt sich um ein Glanzphänomen, das durch die Reflexion des Lichtes an zahlreichen, regelmäßig angeordneten, nadelförmigen Einschlüssen oder Hohlräumen, „Asteriten" genannt, hervorgerufen wird. Bei vollkommen durchsichtigem Material wird offenbar eine zweidimensionale „*Glanzfläche*" zu erwarten sein, von der bei plattenförmigen Objekten natürlich nur ein bandartiger Ausschnitt auftritt; bei undurchsichtigem oder nur schwach durchscheinendem Material werden lediglich die unmittelbar an der Oberfläche oder in der äußersten Schicht befindlichen Asteriten wirksam und es erscheinen mehr oder weniger echte „Glanzkurven". Auch diesbezüglich liegen bereits Ansätze zu geometrischen Betrachtungen vor, die zum Teil wohl recht unzulänglich sind[3]; es darf jedoch nicht übersehen werden, daß die zu berücksichtigende Lichtbrechung beim Ein- und Austritt ziemliche Komplikationen mit sich bringt.

Allen genannten Erscheinungen liegt jedenfalls nach entsprechender Idealisierung und Auflösung der spiegelnden Linien in einzelne Linienelemente — und wenn man zunächst von der Brechung beim Asterismus absieht — der gleiche geometrische Sachverhalt zugrunde: Vorgelegt ist eine (stetige) *Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{S}$ *von* ∞^2 *oder* ∞^3 *Linienelementen* (T, t) im Raum, ferner ein *Augpunkt* A und ein *Lichtzentrum* B; gesucht sind jene Linienelemente, die einen von B kommenden Lichtstrahl nach A reflektieren und dadurch einen Glanzeffekt hervorrufen. Die Gesamtheit der zugehörigen Punkte T erfüllt im allgemeinen eine *Glanzkurve* oder *Glanzfläche*.

Ein „Glanzelement" ist dadurch gekennzeichnet, daß seine Richtung t gleiche Winkel mit dem Sehstrahl TA und dem Lichtstrahl TB

---

[2] Vgl. etwa die zusammenfassende Darstellung: W. H. Roever, Brilliant point phenomena; Washington Univ. Studies 8 (1921), 131—160. Einzelergebnisse wurde niedergelegt in den Ann. of Math. 3 (1902), den Transact. Amer. Math. Soc. 9 (1908) und im Amer. Math. Monthly 20 (1913), 21 (1914), 26 (1919), 28 (1921).

[3] P. Kämmerer, Studien über den Asterismus; Zbl. Min. (1915), 524—542, 546—553.

W. Maier, Experimenteller Asterismus; Jb. f. Min. 78 (1943), 283—380.

bildet. Die physikalisch notwendige Zusatzbedingung für einen echten Glanzpunkt, daß die durch T gehende Normalebene eines solchen Elementes überdies die Punkte A und B trennen muß, wird im folgenden meist unberücksichtigt bleiben, so daß von den hier auf Grund der uneingeschränkten Glanzbedingung bestimmten Glanzgebilden praktisch nur gewisse, nicht näher bezeichnete Teile in Betracht kommen. Daß natürlich auch nur jene Stücke der geometrischen Glanzlinie wirksam werden, die in keinem Schattenbereich liegen, braucht wohl kaum ausdrücklich hervorgehoben zu werden. — Eine allgemein anwendbare Methode zur Ermittlung der Glanzelemente, deren sich auch W. H. Roever bedient, besteht darin, jene Elemente (T, t) aufzusuchen, die von Drehellipsoiden mit den Brennpunkten A, B berührt werden; bei ausdrücklicher Ausschaltung der zu denselben Brennpunkten gehörigen Drehhyperboloide — welche die konfokale Flächenschar erst vollständig machen würden — erscheint auch die erwähnte Nebenbedingung berücksichtigt.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun für eine Reihe besonders charakteristischer, zweifach ausgedehnter Elementensysteme die Glanzkurven bestimmt und untersucht werden. Der Grundgedanke besteht dabei durchwegs darin, das vorgelegte System in eine einfache dreidimensionale Elementenmannigfaltigkeit einzubetten und zunächst deren Glanzfläche zu ermitteln; diese schneidet dann aus der Trägerfläche des gegebenen Systems die gesuchte Glanzkurve aus. Auf diese Weise ist der sonst schwer zu übersehende Formenreichtum der möglichen Glanzkurven verhältnismäßig klar zu erfassen.

II. Glanzkurven von Systemen paralleler Linienelemente. Glanzfläche des Parallelenbündels.

Das reflektierende System $\mathfrak{S}$ bestehe aus einer Mannigfaltigkeit von ∞^2 *parallelen* Linienelementen (T, t), deren Punkte eine *Ebene* ε erfüllen mögen; die Richtung der Elemente braucht ε jedoch keineswegs anzugehören[4]. Wir betrachten $\mathfrak{S}$ als Teilmenge sämtlicher ∞^3 gleichgerichteten Linienelemente des Raumes und ermitteln zunächst die Glanzfläche Σ dieses Obersystems, wobei wir vorerst endliche Lage von Augpunkt A und Lichtquelle B voraussetzen. — Wir wollen uns eines Normalkoordinatensystems x, y, z bedienen, dessen Ursprung O

[4] Ein derartiger Fall liegt z. B. bei einem Drahtgeflecht vor, wenn die Knikkung der Drähte berücksichtigt wird. Vgl. W. H. Roever, a. a. O.

in der Mitte der Strecke AB angenommen wird, dessen x-Achse die Richtung der Elemente hat und dessen z-Achse normal zu AB ist. Die Fundamentalpunkte sind dann durch $A\,(a, b, 0)$ und $B\,(-a, -b, 0)$ festgelegt (Abb. 1).

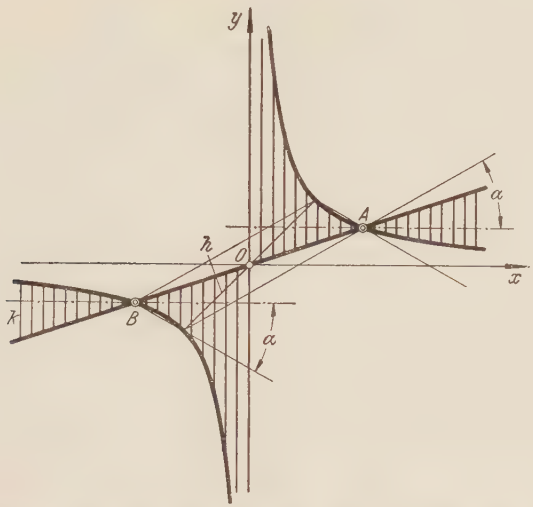

Abb. 1. Kubische Glanzfläche des Parallelenbündels x mit angedeuteten Kreisschnitten k.

Die von A unter einem bestimmten Winkel α gegen die Hauptrichtung x ausgehenden Sehstrahlen bilden einen *Drehkegel* mit x-paralleler Achse und der Öffnung $2\,\alpha$:

$$(x - a)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (y - b)^2 + z^2. \tag{1}$$

Er hat mit dem analogen, von B ausstrahlenden Lichtkegel

$$(x + a)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (y + b)^2 + z^2 \tag{2}$$

neben der Fernkurve einen eigentlichen *Kegelschnitt* h in der Ebene

$$a \operatorname{tg}^2 \alpha \,.\, x = by \tag{3}$$

gemein, der aus lauter Glanzpunkten besteht. Wir hätten ihn auch als Berührungslinie einer zu den Brennpunkten A, B gehörigen Drehfläche 2. Grades mit einem x-parallelen Tangentialzylinder erhalten können. Die Gesamtheit dieser Kegelschnitte h bildet die gesuchte *Glanzfläche* Σ, deren Gleichung sich durch Elimination von α etwa aus (1) und (3) zu

$$x\,(ay^2 + az^2 - bxy) + ab\,(bx - ay) = 0 \tag{4}$$

ergibt. Es handelt sich darnach um eine bezüglich des Ursprungs und der xy-Ebene symmetrische *kubische Fläche*, welche eine Asymptotenebene $x = 0$ und einen Asymptotenkegel 2. Ordnung $a\,(x^2 + y^2) = bxy$ besitzt. Die Ebenen $x = \text{const}$ schneiden die Fläche nach *Kreisen* k, die im Normalriß auf die yz-Ebene ein hyperbolisches Büschel bilden; dessen Nullkreise rühren von den Punkten A und B her, die konische Knotenpunkte von Σ darstellen, ebenso wie die absoluten Punkte der yz-Ebene. Die in der Symmetrieebene $z = 0$ gelegenen Durchmesserendpunkte der Kreise k erfüllen die gleichseitige Hyperbel $xy = ab$ und deren Durchmesser AB (Abb. 1). Längs jedes Parallelkreises k läßt sich der Fläche ein berührender Kegel umschreiben, dessen Spitze auf AB liegt. — Die vorliegende metrisch spezielle Fläche 3. Ordnung ist wiederholt betrachtet worden[5]. Sie läßt sich offenbar auch erklären als Spitzenort aller Drehkegel, welche eine vorgeschriebene Achsenrichtung (x) haben und durch zwei eigentliche, feste Punkte $(A,\ B)$ gehen; sie erscheint damit als Kernfläche (Jacobische Fläche) eines speziellen Gebüsches von Flächen 2. Ordnung mit 6 Grundpunkten, von welchen zwei Paare auf dem absoluten Kegelschnitt zusammengerückt sind.

Für unser Ausgangssystem $\mathfrak{S}$ finden wir nun die *Glanzkurve* s im Schnitt der Trägerebene ε mit der Glanzfläche Σ. Im allgemeinen wird s eine *elliptische Kubik* sein, deren Gleichung sich in jedem Fall leicht hinschreiben läßt. Echte Glanzpunkte enthält natürlich nur der Ast innerhalb der Grenzen $x = \pm a$; er weist eine durch $x = 0$ festgelegte Asymptote auf. — Auf Grund unserer Kenntnisse über die Glanzfläche Σ haben wir bei Anwendung darstellend-geometrischer Methoden alle Mittel zu einer ausreichenden konstruktiven Behandlung der Glanzkurve s in der Hand.

Die Glanzfläche Σ gewährt auch eine klare Übersicht über die möglichen Sonderfälle. So ergibt sich etwa eine *rationale* Glanzkubik s, wenn die Ebene ε Tangentialebene von Σ ist oder durch einen der Knotenpunkte A oder B geht. Die Glanzkurve *zerfällt* hingegen (in eine Gerade und einen Kegelschnitt), wenn die Ebene ε zwei Knotenpunkte enthält,

---

[5] L. Klug, Über einen geometrischen Ort. Arch. Math. Phys. 67 (1882), 330—331.

H. Thieme, Über eine besondere Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten. Z. Math. Phys. 40 (1895), 362—369.

G. Da Fano, Über eine besondere Fläche dritter Ordnung. Z. f. Realschulwesen 37 (1912), 524—538.

also — bei Beschränkung auf die reellen Möglichkeiten — durch A und B geht oder normal zur Elementenrichtung x steht; ebenso tritt Zerfall ein, wenn ε die z-Achse enthält. — Zwei Annahmen seien besonders hervorgehoben:

1) $\varepsilon \parallel x$. Ebene Oberfläche mit parallelen Rillen, Gitter mit parallelen Drähten.

Die Glanzkurve ist eine im allgemeinen elliptische Kubik, die durch das Bild und den Reflex der Lichtquelle B geht. Sie besitzt im allgemeinen zwei rechtwinklige Asymptoten, die sich auf der Kurve (und der z-Achse) schneiden; auszunehmen ist der Fall der zu xz parallelen Ebenen, weil dann ein parabolischer Ast auftritt.

2) $\varepsilon \perp x$. Dünne Platte mit normal zur Oberfläche gelagerten Asteriten.

Als Glanzkurve tritt ein *Parallelkreis* k von Σ auf, der die Gerade AB trifft und der sich auf Grund des für seine Punkte T geltenden konstanten Abstandsverhältnisses $AT : BT = A\varepsilon : B\varepsilon$ auch elementar ableiten läßt. Die Normalrisse der Punkte A und B auf die Ebene ε liegen invers bezüglich k. — Dieser Glanzkreis ist identisch mit dem „*cercle parhélique*" Babinets[6], der bei Betrachtung einer Lichtquelle durch eine dünne, normal zur Asteritenrichtung abgeschliffene Mineralplatte zu beobachten ist; es liegt ja auf der Hand, daß der Einfluß der Lichtbrechung vernachlässigt werden kann, weil Ein- und Austrittswinkel gleich sind und der innere Lichtweg kurz ist.

Die speziellen Lagen $AB \parallel x$ oder $\perp x$, für welche die Glanzfläche zu einer *Ebene* ausartet, bedürfen wohl keiner näheren Erörterung.

Abschließend sei nur noch die Annahme eines uneigentlichen Augpunktes A (Parallelprojektion) oder Lichtzentrums B (Parallelbeleuchtung) gestreift. In diesen Fällen reduziert sich die Glanzfläche auf einen von B, bzw. A ausstrahlenden und den Fernpunkt A, bzw. B enthaltenden *Drehkegel*, dessen Achse die Richtung der spiegelnden Linienelemente hat. Dementsprechend sind die ebenen Glanzkurven im allgemeinen *Kegelschnitte*, deren Art oder Zerfall leicht zu übersehen ist. — Für den Fall, daß beide Fundamentalpunkte im Unendlichen liegen, rufen entweder *sämtliche* Linienelemente oder *keines* einen Glanzeffekt hervor.

III. Glanzkurven von Systemen radialer Linienelemente. Glanzfläche des eigentlichen Strahlbündels

In Verallgemeinerung der in Abschnitt II untersuchten Annahme bestehe das reflektierende System $\mathfrak{S}$ jetzt aus ∞^2 *radialen* Linienelementen (T, t), deren Geraden t also sämtlich durch ein festes eigentliches *Zentrum* C laufen; wir wollen uns wiederum darauf beschränken,

[6] Babinet, Sur le cercle parhélique; C. R. 4 (1837). 638—642; vgl. a. 762ff.

als Ort der Punkte T eine *Ebene* ε vorauszusetzen, die jedoch den Punkt C nicht zu enthalten braucht. Wir fassen $\mathfrak{S}$ als Teil der dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der von den Strahlen des *Bündels* C getragenen Elemente auf und bestimmen zunächst die Glanzfläche dieses Obersystems, wobei die Fundamentalpunkte A und B vorerst gleichfalls im Endlichen angenommen werden. — Wir bedienen uns eines Normalkoordinatensystems x, y, z, dessen Ursprung O in der Mitte der Strecke AB liegt, dessen z-Achse mit AB zusammenfällt und in welchem die y-Koordinate von C verschwindet. Die Grundpunkte sind dann durch $A\,(0, 0, e)$, $B\,(0, 0, -e)$ und $C\,(a, 0, b)$ festgelegt (Abb. 2).

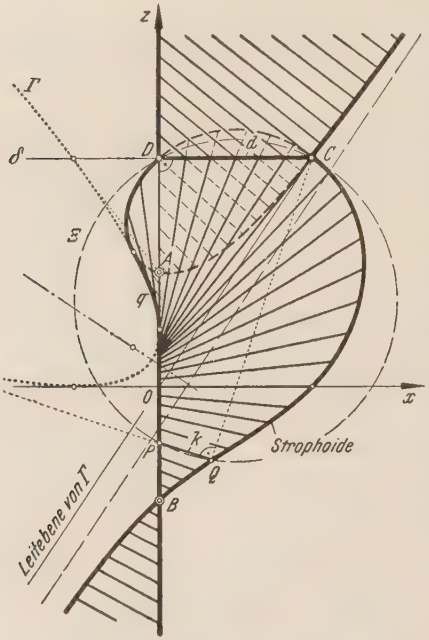

Abb. 2. Glanzfläche 4. Ordnung des eigentlichen Strahlbündels C mit angedeuteten Kreisschnitten k.

Die Glanzfläche konstruieren wir mittels des in Abschnitt I angeführten Prinzips: An die Quadriken Θ der durch die Brennpunkte A und B bestimmten Schar

$$\frac{x^2+y^2}{c^2-e^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{5}$$

legen wir die Tangentialkegel aus C; der Berührungskegelschnitt h wird jeweils von der Polarebene γ

$$\frac{ax}{c^2-e^2}+\frac{bz}{c^2}=1 \tag{6}$$

ausgeschnitten. Die Elimination des Parameters c aus (5) und (6) liefert dann als Gleichung der von h überstrichenen *Glanzfläche* Σ

$$(x^2+y^2+z^2-ax-bz)\,(bx^2+by^2-axz)=e^2(x^2+y^2-ax)\,(z-b). \tag{7}$$

Es handelt sich um eine rationale, die z-Achse enthaltende und zur xz-Ebene symmetrische *Fläche 4. Ordnung*, deren Fernkurve in den absoluten Kugelkreis i und einen reellen Kegelschnitt f zerfällt. Für

$z = b$ verschwindet die rechte Seite von (7), während auf der linken ein vollständiges Quadrat auftritt; die damit zusammenhängende Existenz eines *Doppelkreises d*

$$x^2 + y^2 - ax = 0, z = b \tag{8}$$

läßt sich auch rein geometrisch einsehen: Sei δ die durch C gehende Normalebene von z und D ihr Schnittpunkt mit z; durch jeden der in δ gelegenen Kreise p um D gehen zwei Flächen Θ der Schar (5), so daß die Berührungspunkte der aus C an p legbaren Tangenten Doppelpunkte der Glanzfläche Σ darstellen; ihr Ort ist aber der in δ gelegene Thaleskreis d über dem Durchmesser CD. — Auf Grund des vorhandenen Doppelkegelschnittes gehört Σ zu einer eingehend studierten Unterart der Flächen 4. Ordnung.[7]

Die Ebene γ jedes erzeugenden Kegelschnittes h schneidet die Fläche Σ neben h noch nach einem zweiten Kegelschnitt k, der als *Kreis* zu erkennen ist, da seine Fernpunkte nur auf i liegen können. Ein Schnittpunktpaar von h und k gehört dem Doppelkreis d an, in dem anderen findet indessen Berührung zwischen γ und Σ statt (eine zweite Doppelkurve würde ja das Zerfallen sämtlicher ebenen Schnitte von Σ nach sich ziehen). Die ∞^1 Ebenen γ sind demnach *Doppeltangentialebenen*. Ihr Hüllgebilde, der *parabolische Zylinder* Γ

$$(ax + bz + e^2)^2 = 4\, b\, e^2\, z, \tag{9}$$

berührt Σ längs einer rationalen Quartik q, die den Ort der genannten Berührungspunktepaare darstellt. Als Polarebenen ausgearteter Quadriken Θ gehören neben der Fernebene auch die Ebenen $x = 0$ und $z = 0$ zu den Tangentialebenen von Γ; da sie einen rechten Winkel bilden, ebenso wie die Γ gleichfalls berührenden Tangentialebenen der beiden durch C gehenden Flächen Θ, so stellt die Verbindungsebene Cy die *Leitebene* von Γ dar (Abb. 2).

Da jeder unserer Kreise k den Doppelkreis d in zwei (nicht notwendig reellen) Punkten trifft, so existiert stets eine k und d verbindende *Kugel* Ξ. Ihr vollständiger Schnitt mit der Fläche Σ besteht aus dem absoluten Kreis i, dem einfachen Kreis k und dem doppelt zählenden Kreis d. Der von D verschiedene Schnittpunkt $P = \Xi z$ kann als Σ und Ξ gemeinsamer Punkt nur dem Kreis k angehören. Wie aus Abb. 2 ohne weiteres ersichtlich ist, ist P der Antipode von C auf Ξ, so daß sich der Gegenpunkt Q von P auf k im Fußpunkt des aus C auf die

[7] Vgl. etwa W. F. Meyer, Spezielle algebraische Flächen; Enz. math. Wiss. III C 10 b, Abschn. III u. IV.

Kreisebene γ gefällten Lotes befindet. Die beiden in der Symmetrieebene $y = 0$ liegenden Durchmesserendpunkte P und Q des Kreises k durchlaufen mithin einerseits die z-Achse, anderseits die Fußpunktskurve des parabolischen Zylinders Γ bezüglich des der Leitebene angehörenden Punktes C, also eine *Strophoide* mit dem Doppelpunkt C (rationale zirkulare Kubik mit normalen Doppelpunktstangenten[8]). Die Punkte A und B sind offensichtlich wieder *konische Knotenpunkte* der Glanzfläche.

Zwischen den Kugeln des Büschels d (Ξ) und den Tangentialebenen des parabolischen Zylinders Γ (γ) besteht eine durch die Reihe gemeinsamer Punkte z (P) vermittelte *projektive Beziehung*, als deren Erzeugnis Σ angesehen werden kann; die Ferntangentialebene von Γ ist dabei Bestandteil der zugeordneten zerfallenen Büschelkugel.

Auf Grund ausreichender Kenntnisse über die Glanzfläche Σ läßt sich nun die Vielfalt der möglichen Glanzkurven des ebenen Ausgangssystems $\mathfrak{S}$ überschen. Es handelt sich im allgemeinen um *monozirkulare elliptische Quartiken*, die sich mit Hilfe der Kreisschnitte k ohne weiteres punktweise konstruieren lassen. Im Hinblick auf die projektive Erzeugung von Σ kann eine solche Glanzkurve als Erzeugnis eines Kreisbüschels und einer dazu projektiven Tangentenreihe einer Parabel angesehen werden. — Im besonderen ergibt sich jedoch eine *rationale* Glanzkurve 4. Ordnung, wenn die Trägerebene ε von $\mathfrak{S}$ die Glanzfläche berührt oder durch einen der Knoten A oder B geht. Enthält ε beide Knoten, so reduziert sich die Glanzkurve unter Abspaltung der Achse $AB = z$ auf eine *rationale Kubik*, sie zerfällt hingegen in ein *Kreis-Kegelschnitt-Paar* $k + h$, wenn ε Tangentialebene des parabolischen Zylinders Γ ist. — Besonders hingewiesen sei auf den praktisch häufigen Fall der *vereinigten Lage* von ε und C, der einer mit radialen Spiegelrillen versehenen Ebene zugrunde liegt; das Zentrum C ist in diesem Fall stets ein Doppelpunkt der Glanzkurve, die allgemein von 4. Ordnung, im übrigen aber aller angeführten Ausartungen fähig ist und sich für $AB \perp \varepsilon$ ($= \delta$) sogar auf einen doppelt zu zählenden Kreis reduziert.

---

[8] Diese Strophoide stellt die Glanzkurve des der xz-Ebene angehörenden *Strahlbüschels C* dar und ist als solche des öfteren betrachtet worden:

R. Niemtschik, Neue Konstruktionen der auf ebenen und krummen Flächen erscheinenden Reflexe; Sitzungsb. Ak. Wiss. Wien 53 (1866).

E. Sang, On the curves produced by reflexion from a polished revolving straight wire; Edinburgh Trans. 28 (1877), 273—276.

G. Loria, Identité de la strophoïde avec la focale à nœud, son application à l'optique géométrique. Nouv. Ann. Math. (3) 16 (1897), 262—265.

Einige Sonderlagen der Grundpunkte A, B und C sind noch ausdrücklich zu erwähnen:

1) $a = 0$. A, B, C in einer Geraden.

Die Gleichung (7) der Glanzfläche nimmt nach Abspaltung des Faktors $x^2 + y^2$ die Form

$$x^2 + y^2 + (z - b)\left(z - \frac{c^2}{b}\right) = 0 \qquad (7')$$

an. Es liegt demnach eine *Kugel* durch C und den zu C bezüglich A und B harmonischen Punkt vor, also eine „Apollonische Kugel" des Punktepaares A, B. Ihre Glanzflächeneigenschaft wäre leicht elementar zu bestätigen. — Die Glanzkurven der ebenen Systeme $\mathfrak{S}$ sind mithin stets *Kreise*.

2) $b = 0$. C von A und B gleich weit entfernt.

Die Gleichung (7) der Glanzfläche nimmt nach Abspaltung des Faktors z die Form

$$ax\,(x^2 + y^2 + z^2 - ax) + c^2\,(x^2 + y^2 - ax) = 0 \qquad (7'')$$

an. Diese Fläche 3. Ordnung erweist sich als *parabolische Dupinsche Zyklide* mit reellen Knoten in A und B. Der Hauptschnitt $y = 0$ besteht aus der Geraden AB und dem Kreis ABC (als Rudiment der Strophoide). Der Zylinder 2. Klasse Γ ist in zwei Ebenenbüschel zerfallen: Das Parallelenbüschel der Polarebenen $\gamma \perp x$, in welchen die Kegelschnitte h liegen, und in das eigentliche Büschel mit der Achse $x = -c^2/h$, $z = 0$, dessen Ebenen Kreise enthalten. Auch die Ebenen durch die Achse AB schneiden die Zyklide bekanntlich nach Kreisen. — Die gestaltlichen Varianten der im allgemeinen kubischen und zirkularen Glanzkurven ebener Systeme sind ohne weiteres zu übersehen.

3) A oder B im Unendlichen. Parallelprojektion, bzw. -beleuchtung.

Dieser Grenzfall erfordert eine eigene Behandlung, führt jedoch auf keine wesentlichen Unterschiede gegenüber den allgemeinen Verhältnissen. Die konfokalen Quadriken Θ sind jetzt Drehparaboloide, die Glanzfläche Σ ist wieder von 4. Ordnung, nur zerfällt ihre Fernkurve jetzt in den absoluten Kugelkreis und ein Tangentenpaar desselben.

IV. Glanzkurven auf Drehflächen mit spiegelnden Parallelkreisen. Glanzfläche des koachsialen Kreissystems.

Das spiegelnde System $\mathfrak{S}$ bestehe aus den ∞^2 Linienelementen der *Parallelkreise einer Drehfläche* Φ, deren Achse wir mit der z-Achse des zu benützenden Koordinatensystems zusammenfallen lassen, während wir hinsichtlich der Wahl der anderen Achsen vorläufig keine Festsetzung treffen. Wir denken uns gleich den ganzen Raum durch spiegelnde Kreise mit der Achse z erfüllt und ermitteln zunächst die Glanzfläche dieses Einbettungssystems, vorerst unter der Annahme endlicher Fundamentalpunkte $A\,(a_1, a_2, a_3)$ und $B\,(b_1, b_2, b_3)$.

Die ∞^3 Linienelemente des genannten Obersystems ordnen wir mit Hilfe der *Meridianebenen* γ durch z. Unter den ∞^2 zu einer Ebene γ normalen Elementen befinden sich ∞^1 Glanzelemente (T, t), die sich zufolge II2) längs eines AB treffenden Kreises, des Babinetschen „cercle parhélique" verteilen. Dieser *Glanzkreis* ist der Ort aller Punkte T, für welche die Proportion

$$AT : BT = A\gamma : B\gamma = \text{const}$$

gilt, und ergibt sich demnach konstruktiv als Schnitt der Meridianebene γ mit einer *Apollonischen Kugel* Γ des Punktepaares A, B. Dreht sich γ um z, so durchläuft Γ das durch die Nullkugeln A und B bestimmte hyperbolische Büschel, dessen (nullteiliger) Grundkreis mit c bezeichnet sei. Die Zuordnung der beiden Büschel $z(\gamma)$ und $c(\Gamma)$ ist durch die Schnittbedingung von γ und Γ auf AB festgelegt und demnach eine (1, 2)-Korrespondenz. Das Erzeugnis, die gesuchte *Glanzfläche* Σ, ist darnach von *4. Ordnung* und geht einfach durch die aus dem Kreis c und dem absoluten Kegelschnitt i bestehende Basis des Kugelbüschels, hingegen zweimal durch die Achse z. Die Punkte A und B sind wieder konische Doppelpunkte mit berührenden Drehkegeln; neben ihrer Verbindungsgeraden gehören der Fläche noch vier weitere Geraden an, die von der zerfallenden Büschelkugel herrühren (darunter zwei uneigentliche).

Um die Gleichung der Glanzfläche zu gewinnen, stellen wir die Ebene γ als Linearkombination der durch A und B gehenden Büschelebenen α und β dar:

$$\alpha - \lambda\beta = 0 \text{ mit } \alpha \equiv a_2\, x - a_1\, y \text{ und } \beta \equiv b_2\, x - b_1\, y. \tag{10}$$

Analog ergibt sich die Büschelkugel Γ mit Hilfe der Nullkugeln A und B zu

$$\begin{aligned} \mathsf{A} - \mu\,\mathsf{B} = 0 \text{ mit } \mathsf{A} &\equiv (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \\ \text{und } \mathsf{B} &\equiv (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 + (z - b_3)^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Parameterwerte für die Büschelelemente, die einen bestimmten Punkt $x = a_1 + (b_1 - a_1)\,t$, $y = a_2 + (b_2 - a_2)\,t$, $z = a_3 + (b_3 - a_3)\,t$ der Leitlinie $l = AB$ enthalten, ergeben sich durch Einsetzen mit

$$\lambda = \frac{t}{t-1},\ \mu = \left(\frac{t}{t-1}\right)^2,$$

die „Schnittbedingung" drückt sich daher einfach durch $\lambda^2 = \mu$ aus und die Glanzflächengleichung lautet mit Benützung der eingeführten Abkürzungen

$$\alpha^2 \mathsf{B} - \beta^2 \mathsf{A} = 0. \tag{12}$$

Schlagen wir um den in der Mittelebene ω von A und B liegenden Punkt O der z-Achse jene Kugel Ω, die durch A und B geht, und beachten wir, daß sie alle Meridianebenen γ und Büschelkugeln Γ, also auch die Glanzkreise $\gamma\Gamma$ rechtwinklig schneidet, so erkennen wir, daß die Glanzfläche Σ die *Inversion* bezüglich Ω verträgt, also *anallagmatisch* ist. Üben wir unter diesen Umständen die durch Ω bestimmte Darbouxsche Transformation $\mathfrak{T}$ aus, die jedem bezüglich Ω inversen Punktepaar $P, \overline{P}$ den Pol P^* seiner Mittelebene zuordnet[9], so wird Σ in eine gewisse *Strahlfläche* (Regelfläche) Σ^* verwandelt. Wir bemerken, daß $\mathfrak{T}$ das Büschel $z\,(\gamma)$ ebenenweise festläßt, während das Kugelbüschel $c\,(\Gamma)$ in ein zweites Ebenenbüschel $c^*\,(\Gamma^*)$ übergeführt wird, dessen Achse c^* mit der reziproken Polare von AB identisch ist. Diese Ebenenbüschel sind gleichfalls einzweideutig aufeinander bezogen und Σ^* ist als ihr Erzeugnis eine *kubische Strahlfläche*, festgelegt etwa durch die doppelte Leitgerade z, die einfache Leitgerade c^* und den $AB = l$ entsprechenden Leitkegelschnitt l^*, der mit z den Punkt O gemein hat. Damit ist die Glanzfläche Σ auf eine einfachere Fläche Σ^* zurückgeführt, aus welcher sie umgekehrt mittels der inversen Transformation $\mathfrak{T}^{-1}$ abgeleitet werden kann.

Die auf unserer Drehfläche Φ auftretende Glanzkurve wird nun von der Glanzfläche Σ ausgeschnitten. Demgemäß ergeben sich z. B. auf *Drehflächen 2. Ordnung* mit spiegelnden Parallelkreisen im allgemeinen *Glanzkurven 8. Ordnung*, die in den beiden Flächenscheiteln Doppelpunkte aufweisen; bei einer *Kugel* verbleibt nach Abspaltung des absoluten Kegelschnittes eine eigentliche *Glanzkurve 6. Ordnung*.

Von besonderem Interesse ist der Fall einer Ebene ε mit konzentrischen Kreisrillen. Die möglichen Glanzkurven sind die achsennormalen Schnitte $z = \text{const}$ der Glanzfläche Σ, also im allgemeinen *monozirkulare Quartiken* vom Geschlecht 2, die einen Doppelpunkt im Rillenzentrum aufweisen; von den beiden reellen Asymptoten fällt die eine mit der Normalprojektion von AB zusammen, die andere läuft parallel zu der durch den Halbierungspunkt von AB gehenden Achsenebene[10].

---

[9] G. Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques (Paris 1873).

$\mathfrak{T}$ ist eine einzweideutige, quadratische Punktverwandtschaft, welche die Orthogonalkreise, bzw. -kugeln von Ω in Geraden, bzw. Ebenen überführt.

[10] W. H. Roever zeigt a. a. O. sehr schöne Photographien derartiger Glanzlinien auf einem Kreissägenblatt.

Im folgenden seien einige spezielle Anordnungen angeführt, wobei ω die Mittelebene von AB bedeutet:

1) $\omega \parallel z$.

Da $O = \omega\, z$ ins Unendliche rückt, artet die Orthogonalkugel Ω in eine *Symmetrieebene* der Glanzfläche Σ aus. Der Symmetrieschnitt besteht aus der *Geraden* $l = AB$ und einer *Strophoide* m, die ihren Doppelpunkt auf der z-Achse hat und durch A, B und jenen Punkt C von l geht, der z am nächsten liegt[11]. Durch die beiden Leitlinien l und m ist die Schar der Kreise, die in den Meridianebenen durch z liegen, und damit auch die Fläche Σ vollkommen bestimmt. Die Fläche ist nach wie vor von 4. Ordnung, besitzt aber *drei konische Knotenpunkte*, nämlich A, B und C.

2) ω durch z.

$O = \omega\, z$ wird unbestimmt auf z, die Glanzfläche verträgt daher ∞^1 Inversionen und enthält sämtliche (zur Leitgeraden l inversen) Kreise durch A und B, die z treffen, womit sie als *parabolische Dupinsche Zyklide* (3. Ordnung) zu erkennen ist. Es wäre auch unschwer elementar einzusehen, daß an Stelle der Strophoide m von 1) ein *Kreis* tritt.

3) AB trifft z.

Die Glanzfläche zerfällt in die doppelt zählende *Meridianebene* durch A und B, und jene *Apollonische Kugel* des Punktepaares A, B, welche den Schnittpunkt von AB und z enthält, denn deren zugeordnete Büschelebene wird unbestimmt. Für diese Annahme treten demnach besonders einfache Glanzkurven auf; im Falle einer nach konzentrischen Kreisen gerieften *Ebene* besteht die Glanzlinie aus einem *Kreis* und einer *Doppelgerade*[10].

4) A oder B unendlich fern.

Lassen wir etwa B ins Unendliche rücken (Parallelbeleuchtung), dann haben die Kugeln des Büschels $c(\Gamma)$ den Augpunkt A als gemeinsamen Mittelpunkt. Die Glanzfläche bleibt von 4. Ordnung, weist jetzt aber neben z noch eine *zweite Doppelgerade* auf, nämlich die Ferngerade der Ebene Bz. Der Knotenpunkt B hat damit auch seinen konischen Charakter in einen biplanaren abgeändert.

5) A und B unendlich fern.

Es ist klar, daß im Falle von Parallelbeleuchtung und Parallelprojektion alle zu einem Glanzelement parallelen Linienelemente gleichberechtigt sind (vgl. Abschnitt V). Die Glanzfläche besteht in unserem Fall aus *zwei Meridianebenen*, von welchen im konkreten Fall nur eine mit echten Glanzelementen behaftet ist. Entsprechend besteht die Glanzkurve einer Drehfläche mit spiegelnden Parallelkreisen aus zwei *Meridianen*, von denen der eine jedoch nur als virtuelle Glanzkurve anzusehen ist.

---

[11] Diese kubische Glanzkurve m der konzentrischen Kreisschar deckt sich (in geometrischer Hinsicht) mit der Glanzkurve des Durchmesserbüschels und ist daher identisch mit der in Fußnote 8 erwähnten Strophoide.

V. Glanzkurven auf Drehflächen mit spiegelnden Meridianen bei Parallelprojektion und Parallelbeleuchtung.

Der Fall einer beliebigen *Drehfläche Φ mit spiegelnden Meridianen* läßt sich bei endlicher Lage von Augpunkt A und Lichtquelle B mit Benützung der Ergebnisse von Abschnitt III behandeln, indem man je ∞^1 Linienelemente längs eines Parallelkreises p zusammenfaßt und in ein radiales System einbettet. Die Bestimmung der auf p gelegenen Glanzpunkte läuft dann auf den Schnitt von p mit der Glanzfläche 4. Ordnung eines Strahlbündels hinaus, d. h. mit Rücksicht auf ein gemeinsames Paar absoluter Punkte im allgemeinen auf eine *Aufgabe 6. Grades.*

Unter diesen Umständen wollen wir nur auf die wesentlich einfachere Annahme uneigentlicher Fundamentalpunkte A, B eingehen. Denken wir uns die Sehstrahlen auf A zu und die Lichtstrahlen von B weg orientiert, dann rufen alle jene Linienelemente Glanzeffekte hervor, die parallel zu einer gewissen „*Leitebene*" ω liegen, welche den Winkel eines beliebigen Sehstrahl-Lichtstrahl-Paares hälftet; parallel zur Halbierungsebene des Nebenwinkels liegen nur virtuelle Glanzelemente, die außer Betracht bleiben sollen.

Die punktweise Konstruktion der *Glanzkurve* s einer Drehfläche Φ mit spiegelnden Meridianen läßt sich nach dem Gesagten leicht durchführen: Wir umschreiben Φ längs eines Parallelkreises p den Drehkegel und legen durch seine Spitze die zur Stellung ω parallele Ebene; diese schneidet p in zwei Glanzpunkten. Anders ausgedrückt: Die Glanzkurve ist die Berührungslinie des der Drehfläche umschriebenen *Konoids*, dessen Leitlinien die Ferngerade u von ω und die Flächenachse z sind. Sie läßt sich mithin auffassen als die Schnittlinie von Φ mit der „benachbarten" Fläche Φ_1, die aus Φ durch die „infinitesimale" *windschiefe Affinität* $\mathfrak{A}_1$ mit den Achsen u und z (schiefe achsiale Symmetrie) hervorgeht. Diese Vorstellung gestattet eine rasche Beurteilung der Glanzkurve s von *algebraischen* Drehflächen Φ: Hat Φ die Ordnung n, dann wird s im allgemeinen die Ordnung n^2 haben, die jedoch im Falle vorhandener Doppellinien mit der Gesamtordnung d und Rückkehrkanten mit der Gesamtordnung r um $2\,d + 3\,r$ zu vermindern ist, von höheren Singularitäten abgesehen; ebenso sind allfällige Φ angehörende Treffgeraden von u und z abzuziehen.

Ist Φ z. B. eine *Mittelpunktsfläche 2. Ordnung* — insbesondere eine *Kugel*[1] —, dann tritt als Glanzkurve eine zentralsymmetrische *Quartik* auf, die die Flächenscheitel sowie die absoluten Punkte der Hauptsymmetrieebene enthält und daher

aus der Flächenmitte durch einen orthogonalen Kegel 2. Ordnung projiziert wird, der die Flächenachse als Scheitelerzeugende besitzt[12]. Im Fall eines *Drehparaboloids* spalten sich noch die beiden Fernerzeugenden ab, so daß für die eigentliche Glanzkurve ein *Kegelschnitt* durch den Flächenscheitel übrigbleibt.

Ist Φ schließlich ein *Torus*[1] ($n = 4$), so ist der absolute Kugelkreis ($d = 2$) zweifach von $\Phi\Phi_1$ abzuziehen und es ergibt sich eine eigentliche *Glanzkurve 12. Ordnung*, die die vier auf u und z gelegenen Flächenpunkte zu Doppelpunkten und die absoluten Punkte der Äquatorebene zu vierfachen Punkten besitzt.

Bei analytischer Behandlung ergibt sich die Glanzkurve einer beliebigen Drehfläche Φ, dargestellt durch

$$F(r, z) = 0 \text{ mit } r^2 = x^2 + y^2, \tag{13}$$

als Schnitt mit der Fläche Ψ

$$(u_1 x + u_2 y) \frac{\partial F}{\partial z} - u_3 r \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \tag{14}$$

wenn $x : y : z = u_1 : u_2 : u_3$ die den Winkel zwischen Blick- und Lichtrichtung halbierende Richtung ($\perp \omega$) angibt. Ψ kann als *Glanzfläche* des mit den spiegelnden Meridianen der einparametrigen Flächenschar $F(r, z) = \text{const}$ erfüllten Raumes angesehen werden; die Art dieser Flächenschar hängt allerdings noch wesentlich von der Gestalt ab, die man der Gleichung von Φ erteilt.

[12] W. H. Roever beschreibt a. a. O. ein hierhergehöriges Glanzphänomen, das auf dem halbkugelförmigen Kuppeldach der Kathedrale von St. Louis zu beobachten ist und seine Ursache in der Form und Anordnung der glasierten Dachziegel hat, die spiegelnde Rinnen und Stränge längs der Meridiane bilden.

Einige Anwendungen eines Funktionalsatzes für konvexe Körper in der räumlichen Integralgeometrie.

Von
H. Hadwiger, Bern.

(Eingelangt am 15. April 1950.)

W. Blaschke[1] hat bekanntlich darauf hingewiesen, daß sich die meisten Formeln der räumlichen Integralgeometrie ziemlich mühelos und einheitlich dann ergeben, wenn es gelingt, die vier fundamentalen Maßzahlen für konvexe Körper, nämlich die Konstante $C = 4\pi$, das Integral der mittleren Krümmung M, die Oberfläche F und das Volumen V durch die Eigenschaften der Bewegungsinvarianz, Additivität und Beschränktheit oder Stetigkeit zu charakterisieren. Es handelt sich darum, nachzuweisen, daß die Mannigfaltigkeit der über dem System der konvexen Körper eindeutig erklärten invarianten, additiven und beschränkten oder stetigen Funktionale φ identisch ist mit der linearen Schar $\varphi = \alpha C + \beta M + \gamma F + \delta V$, welche durch die Grundfunktionale C, M, F und V aufgespannt wird. *W. Blaschke* selbst entwirft allgemeiner für dreidimensionale Komplexe eine wirkungsvolle Beweiskonstruktion. Hierbei wird aber eine weitere zusätzliche Voraussetzung notwendig, indem man für einen bei der Synthese des Funktionals sich ergebenden letzten Bestandteil eine bestehende Affininvarianz postulieren muß. Da sich diese Zusatzvoraussetzung, die erst während des Beweises formuliert werden kann, nicht ohne weiteres in eine solche verwandeln läßt, die sich auf das ursprüngliche Funktional bezieht, stellt das erzielte Ergebnis nicht einen Satz der gewünschten Art dar, durch den alle vier Maßzahlen durch eine Gruppe einfacher und gemeinsamer Eigenschaften charakterisiert würden.

Verf. hat vor einigen Jahren dieses Problem wieder aufgegriffen und schließlich einen entsprechenden Funktionalsatz bewiesen[2]. Um

[1] Vorlesungen über Integralgeometrie, 2. Heft; Hamburger Math. Einzelschriften, 22. Heft, 1937. Vgl. insbesondere § 43.

[2] Der allgemeine sich auf den k-dim. Raum beziehende Satz soll im Rahmen einer ausführlicheren Darstellung veröffentlicht werden. Eine knappe Darstellung

I. Ein Funktional φ heißt *bewegungsinvariant*, wenn für zwei kongruente Körper A und A' stets gilt

$$\varphi(A) = \varphi(A').$$

II. Ein Funktional φ heißt *additiv*, wenn für einen Körper $A + B$, der durch eine Ebene, welche den ebenen Schnittbereich AB herausschneidet, in die zwei Teilkörper A und B zerlegt ist, stets gilt

$$\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A + B) + \varphi(AB).$$

III. Ein Funktional φ heißt *stetig*, wenn es für jeden Körper A und zu jedem $\varepsilon > o$ ein $\vartheta > o$ so gibt, daß für alle Körper A', welche die Distanzbedingung $d(A, A') < \vartheta$ erfüllen, stets gilt

$$|\varphi(A) - \varphi(A')| < \varepsilon.$$

Nun formulieren wir den

diesen formulieren zu können, müssen die hier in Frage stehenden charakteristischen Eigenschaften genauer erklärt sein. Dies sind die folgenden:

Funktionalsatz: Die Gesamtheit der über der Klasse der konvexen Körper A des Raumes eindeutig definierten bewegungsinvarianten, additiven und stetigen Funktionale $\varphi(A)$ ist durch die lineare Funktionalschar

$$\varphi(A) = \alpha C(A) + \beta M(A) + \gamma F(A) + \delta V(A)$$

gegeben, wobei α, β, γ, δ vier dem Funktional φ zugeordnete Koeffizienten sind.

Es wäre besonders im Hinblick auf die mannigfaltigen Anwendungen des Funktionalsatzes sehr wünschbar, die Voraussetzung der Stetigkeit durch die wesentlich schwächere Bedingung der Beschränktheit zu ersetzen[3].

Mit der vorliegenden Note sollen einige charakteristische Anwendungen gezeigt werden. Es soll sich um die Ermittlung gewisser kinematischer Integrale handeln, wie man sie in der räumlichen Integralgeometrie betrachtet. Neben einer kleinen Auswahl bekannter Formeln werden auch einige Resultate gewonnen, die an sich neu sein dürften.

---

des Beweises hat der Verf. in einem Vortrag am 13. 10. 1949 im Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach gegeben. Einen besonderen Beweis für den 3-dim. Raum hat Verf. am 25. 7. 1950 im Mathematischen Kolloquium Hamburg vorgetragen; dieser wird demnächst in den Hamb. Abh. erscheinen.

[3] Der dem Verf. bekannte Beweis benötigt die Voraussetzung der Stetigkeit, um aus einer bereits ermittelten Gültigkeit des Satzes für konvexe Polyeder auf dem üblichen Wege die Gültigkeit für beliebige Körper zu erschließen. Ein Beweis unter der schwächeren Bedingung der Beschränktheit hätte wohl einen grundsätzlich anders gerichteten Weg einzuschlagen.

a) Drehintegrale.

Es bezeichne ω eine Drehung im Raum um den Ursprung Z, welche A in A^ω überführen möge. Diese kann repräsentiert werden durch eine Rechtsdrehung um eine durch den Richtungseinheitsvektor $\mathfrak{s}$ festgelegte Drehachse um den Winkel θ. Bedeutet $d\sigma$ das Flächendifferential der Einheitskugel, welche der Spitze von $\mathfrak{s}$ zugehört, so heißt der Differentialausdruck $d\omega = d\sigma\, d\theta$ *Drehdichte*. Für das über alle Drehungen erstreckte Integral dieser Dichte hat man

$$\int d\omega = 8\pi^2.$$

Es sei nun $\psi(A)$ ein translationsinvariantes und additives Funktional mit der weiteren Eigenschaft, daß das über alle Drehungen erstreckte Integral

$$\varphi(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int \psi(A^\omega)\, d\omega \tag{1}$$

für alle A existiert und ein stetiges Funktional φ darstellt. Unmittelbar kann verifiziert werden, daß φ auch bewegungsinvariant und additiv ist. Nach dem Funktionalsatz gibt es also vier Koeffizienten α, β, γ und δ, so daß

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \psi(A^\omega)\, d\omega = \alpha C + \beta M + \gamma F + \delta V \tag{2}$$

gilt. Die Koeffizienten der allgemeinen Formel für das Drehintegral (2) sind natürlich durch das Funktional ψ bestimmt und lassen sich aus diesem in einfachster Weise gewinnen. Für eine Kugel K_ϱ vom Radius ϱ muß doch die Beziehung

$$\varphi(K_\varrho) = \psi(K_\varrho) = 4\pi\left(\alpha + \beta\,\varrho + \gamma\,\varrho^2 + \frac{\delta}{3}\,\varrho^3\right) \tag{2a}$$

bestehen. Diese enthält in impliziter Form die richtige Behauptung, daß ein beliebiges translationsvariantes, additives und stetiges Funktional für die Kugel stets eine ganze rationale Funktion des Radius von höchstens drittem Grade sein muß[4].

Wir betrachten nun einige Spezialfälle der allgemeinen Drehformel (2).

---

[4] In der Tat läßt sich allgemeiner zeigen, daß ein translationsinvariantes, additives und stetiges Funktional bei ähnlicher Vergrößerung eine ganze rationale Funktion des Vergrößerungskoeffizienten von höchstens drittem Grade ist.

1. Es soll $\overline{A}$ den durch orthogonale Projektion des Körpers A auf eine feste Ebene des Raumes erzeugten (zweidimensionalen) Körper und analog $\overline{\overline{A}}$ den durch eine ebensolche Projektion auf eine feste Gerade erzeugten (eindimensionalen) Körper bezeichnen. Die vier Maßzahlen dieser Projektionskörper sind, wie man mühelos feststellt, translationsinvariante, additive und stetige Funktionale des ursprünglichen Körpers. Es handelt sich also um einfache Interpretationen des von uns oben betrachteten Funktionals ψ, und die Formel (2) kann zur Anwendung kommen. Es ergeben sich die folgenden Relationen:

$$\frac{1}{8\pi^2}\int C(\overline{A}^\omega)\,d\omega = C; \qquad \frac{1}{8\pi^2}\int C(\overline{\overline{A}}^\omega)\,d\omega = C; \tag{3}$$

$$\frac{1}{8\pi^2}\int M(\overline{A}^\omega)\,d\omega = \frac{\pi}{4}M; \qquad \frac{1}{8\pi^2}\int M(\overline{\overline{A}}^\omega)\,d\omega = \frac{1}{2}M; \tag{4}$$

$$\frac{1}{8\pi^2}\int F(\overline{A}^\omega)\,d\omega = \frac{1}{2}F; \qquad \frac{1}{8\pi^2}\int F(\overline{\overline{A}}^\omega)\,d\omega = 0; \tag{5}$$

$$\frac{1}{8\pi^2}\int V(\overline{A}^\omega)\,d\omega = 0; \qquad \frac{1}{8\pi^2}\int V(\overline{\overline{A}}^\omega)\,d\omega = 0. \tag{6}$$

Mit Rücksicht auf allseitige Vollständigkeit und Symmetrie wurden vom Verf. in dieser Arbeit gelegentlich auch triviale Formeln in die Tafeln aufgenommen und er muß hier um verständnisvolle Nachsicht bitten. — Die nicht trivialen Integralformeln der oben stehenden Tafel wurden, wenn auch in etwas anderer geometrisch einfacherer Interpretation, bereits von *L. A. Cauchy*[5] entdeckt.

2. Die folgende Formelgruppe bezieht sich auf die *Minkowskische Summe* $A + B$ zweier konvexer Körper. Bezeichnen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die im Ursprung Z entspringenden Ortsvektoren der Punkte von A und B, so ist $A + B$ als Menge derjenigen Punkte erklärt, deren Ortsvektoren durch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ gegeben sind. Wie bekannt ist $A + B$ wieder ein konvexer Körper. Denkt man sich zunächst A_0 fest, so sind die vier Maßzahlen von $A_0 + A$ translationsinvariante und additive Funktionale von A. Nach (2) und (2a) gewinnt man jetzt:

$$\frac{1}{2\pi}\int C(A_0 + A^\omega)\,d\omega = C_0\,C; \tag{7}$$

[5] Vgl. *W. Blaschke*, loc. cit. Fußnote 1; Formeln 72, 74 und 79.

$$\frac{1}{2\pi}\int M(A_0 + A^\omega)\,d\omega = C_0 M + M_0 C; \tag{8}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int F(A_0 + A^\omega)\,d\omega = C_0 F + 2 M_0 M + F_0 C; \tag{9}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int V(A_0 + A^\omega)\,d\omega = C_0 V + M_0 F + F_0 M + V_0 C. \tag{10}$$

Die Koeffizientenbestimmung gemäß (2) ergibt sich einfach auf Grund der Bemerkung, daß $A + K\varrho$ der äußere Parallelkörper von A im Abstand ϱ ist. Werden nun für die Maßzahlen dieses Parallelkörpers die Formeln von *J. Steiner* in Anspruch genommen, so lassen sich die Koeffizienten ablesen.

3. Eine weitere Gruppe u. W. neuartiger Integralrelationen bezieht sich auf die affine *Richtungsdilatationen* eines konvexen Körpers A. Ist $\mathfrak{d}$ ein Einheitsvektor, der die Richtung der Dilatation bezeichnet, und sind $\mathfrak{a}$ Ortsvektoren der Punkte von A, so definieren wir den dilatierten Körper A_λ durch die Menge derjenigen Punkte, deren Ortsvektoren die Form $\mathfrak{a}+(\lambda-1)(\mathfrak{d},\mathfrak{a})\,\mathfrak{d}$ aufweisen; hierbei bedeutet $(\mathfrak{d},\mathfrak{a})$ das skalare Produkt und der *Dilatationskoeffizient* λ ist ein im Intervall $0 < \lambda < \infty$ beliebig wählbarer Parameter. Ohne weiteres verifiziert man, daß die vier Maßzahlen von A_λ bei fest gedachten $\mathfrak{d}$ und λ translationsinvariante, additive und stetige Funktionale von A sind. Nach (2) und (2a) erhält man nunmehr die folgenden Drehintegrale:

$$\frac{1}{8\pi^2}\int C(A_\lambda^\omega)\,d\omega = \alpha_\lambda C; \tag{11}$$

$$\frac{1}{8\pi^2}\int M(A_\lambda^\omega)\,d\omega = \beta_\lambda M; \tag{12}$$

$$\frac{1}{8\pi^2}\int F(A_\lambda^\omega)\,d\omega = \gamma_\lambda F; \tag{13}$$

$$\frac{1}{8\pi^2}\int V(A_\lambda^\omega)\,d\omega = \delta_\lambda V, \tag{14}$$

wobei sich die Koeffizienten gemäß (3) aus den Maßzahlen des Rotationsellipsoids errechnen lassen. Es ist $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 1$; für $\lambda \neq 1$ hat man:

$$\alpha_\lambda = 1; \tag{11a}$$

$$\beta_\lambda = \frac{1}{2}\left[\lambda + \frac{\arccos \lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right] = \frac{1}{2}\left[\lambda + \frac{\log\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right]; \tag{12a}$$

$$\gamma_\lambda = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}} \log\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\lambda^2 \arccos \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right]; \tag{13a}$$

$$\delta_\lambda = \lambda, \tag{14}$$

wo für $\lambda < 1$ die linksstehenden, für $\lambda > 1$ dagegen die rechtsstehenden Darstellungen derselben Funktion zur Verfügung stehen.

Die vier Maßzahlen von A_λ sind bei festgewählter Richtung $\mathfrak{d}$ und veränderlichem λ differenzierbare Funktionen von λ. Werden die Ableitungswerte an der Stelle $\lambda = 1$ kurz durch einen übergesetzten Punkt kenntlich gemacht, so stellen die vier so erklärten *Richtungsdilatationsderivierte* $\dot{C}(A)$, $\dot{M}(A)$, $\dot{F}(A)$ und $\dot{V}(A)$ wieder translationsinvariante, additive und stetige Funktionale von A dar. Auf einläßlichere Erklärungen und Begründungen wollen wir an dieser Stelle verzichten und nur die sich gemäß (2) und (2a) ergebende Formelgruppe anschreiben:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \dot{C}(A^\omega)\, d\omega = 0; \tag{15}$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \dot{M}(A^\omega)\, d\omega = \frac{1}{3} M; \tag{16}$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \dot{F}(A^\omega)\, d\omega = \frac{2}{3} F; \tag{17}$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \dot{V}(A^\omega)\, d\omega = V. \tag{18}$$

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß die Cauchyschen Relationen (3) bis (6) sich als Grenzfälle der Formeln (11) bis (14) interpretieren lassen. In der Tat: Für $\lambda \to 0$ gilt $A_\lambda \to \overline{A}$, wobei $\overline{A}$ den orthogonalen (zweidimensionalen) Projektionskörper von A bezüglich einer auf der Dilatationsrichtung $\mathfrak{d}$ orthogonal stehenden Ebene bezeichnet. Mit $\alpha_\lambda \to 1$, $\beta_\lambda \to \frac{\pi}{4}$, $\gamma_\lambda \to \frac{1}{2}$, $\delta_\lambda \to 0$ ergeben sich die sich auf $\overline{A}$ beziehenden Cauchyschen Formeln. Für $\lambda \to \infty$ gilt dagegen $\frac{1}{\lambda} A_\lambda \to \overline{\overline{A}}$, wobei $\overline{\overline{A}}$ den orthogonalen (eindimensionalen) Projektionskörper von A bezüglich einer zur Dilatationsrichtung $\mathfrak{d}$ parallelen

Geraden bedeutet. Mit $\alpha_\lambda \longrightarrow 1, \frac{1}{\lambda}\beta_\lambda \longrightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{\lambda^2}\gamma_\lambda \longrightarrow 0, \frac{1}{\lambda^3}\delta_\lambda \longrightarrow 0$ folgert man analog die sich auf $\overline{\overline{A}}$ beziehenden Cauchyschen Formeln.

b) Bewegungsintegrale.

Es bezeichne jetzt $\varkappa$ eine Bewegung im Raum, welche A in $A_\varkappa$ überführt. Diese kann durch eine Drehung ω um den Ursprung Z und durch eine anschließende Translation τ repräsentiert werden. Die Translation τ denken wir uns durch einen in Z angreifenden Verschiebungsvektor $\mathfrak{t}$ charakterisiert. Bezeichnet nun $d\,\tau$ das der Spitze von $\mathfrak{t}$ zugeordnete Volumdifferential, so heißt der Differentialausdruck $d\,\varkappa = d\,\omega\, d\,\tau$ *Bewegungsdichte*; hierbei stellt $d\,\omega$ die im vorigen Abschnitt erörterte Drehdichte dar.

Es sei nun weiter $\psi\,(A)$ ein additives Funktional mit der Eigenschaft, daß das über alle Bewegungen erstreckte Integral

$$\varphi\,(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int \psi\,(A^\varkappa)\, d\,\varkappa \tag{19}$$

für alle A existiert und ein stetiges Funktional darstellt. Es ist unmittelbar verifizierbar, daß nunmehr $\varphi\,(A)$ ein bewegungsinvariantes, additives und stetiges Funktional ist. Nach dem Funktionalsatz gibt es also vier Koeffizienten α, β, γ und δ, so daß

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \psi\,(A^\varkappa)\, d\,\varkappa = \alpha\, C + \beta\, M + \gamma\, F + \delta\, V \tag{20}$$

gilt. Die Koeffizienten der allgemeinen Formel für dieses Bewegungsintegral (20) sind offenbar durch das Funktional ψ bestimmt. Um ihre Ermittlung in die Wege zu leiten, betrachten wir speziell eine Kugel K_ϱ vom Radius ϱ; es ergibt sich die folgende Beziehung

$$\varphi\,(K_\varrho) = \int \psi\,(K_\varrho^\tau)\, d\,\tau = 4\pi\,(\alpha + \beta\,\varrho + \gamma\,\varrho^2 + \frac{\delta}{3}\,\varrho^3), \tag{20a}$$

wobei sich die Integration über sämtliche Translationen τ zu erstrecken hat. Der Wert des totalen Translationsintegrals eines beliebigen additiven Funktionals muß demnach für die Kugel stets eine ganze rationale Funktion des Radius von höchstens drittem Grade sein. Ist diese ermittelt, so können die Koeffizienten abgelesen werden.

Wir betrachten nun wieder einige Spezialfälle der allgemeinen Bewegungsformel (20).

1. Es bedeute A_0 einen festen konvexen Körper. Die vier Maßzahlen des Durchschnittes $A_0 A$ sind additive Funktionale von A, welche nach Ansatz (19) an die Stelle von $\psi(A)$ treten können. Einige zusätzliche Untersuchungen lehren bald[6], daß die entstehenden Bewegungsintegrale in der Tat stetige Funktionale von A definieren, so daß der Funktionalsatz anwendbar ist. Die vier sich ergebenden Formeln repräsentieren wohl die wesentlichen Lehrsätze der sich auf konvexe Körper beziehenden räumlichen Integralgeometrie.

Diese kinematischen Hauptformeln von *W. Blaschke* und *L. A. Santaló*[7] lauten wie folgt:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int C(A_0 A^x)\, d\varkappa = V_0 C + F_0 M + M_0 F + C_0 V; \quad (21)$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \int M(A_0 A^x)\, d\varkappa = V_0 M + \frac{\pi^2}{16} F_0 F + M_0 V; \quad (22)$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \int F(A_0 A^x)\, d\varkappa = V_0 F + F_0 V; \quad (23)$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \int V(A_0 A^x)\, d\varkappa = V_0 V. \quad (24)$$

Besonders einfach gestaltet sich die Koeffizientenermittlung für die erste wichtigste Formel (21). In der Tat ergibt sich nach (20a) zunächst

$$\varphi(K_\varrho) = \int C(A_0 K_\varrho^\tau)\, d\tau = 4\pi V(A_0 + K_\varrho) = 4\pi(\alpha + \beta\varrho + \gamma\varrho^2 + \frac{\delta}{3}\varrho^3);$$

weiter ist wie bereits im vorigen Abschnitt vermerkt $A_0 + K_\varrho$ mit dem äußeren Parallelkörper von A_0 identisch, so daß sich nunmehr die Koeffizienten nach Anwendung der Formel von *J. Steiner* für das Parallelvolumen direkt ablesen lassen.

2. Es sei $p(r)$ eine im Intervall $o \leqq r < \infty$ definierte Funktion, die wir zunächst als beschränkt und stetig voraussetzen wollen[8]. Ferner soll das Integral

$$a = 4\pi \int_0^\infty r^2 p(r)\, dr$$

---

[6] Mit Rücksicht auf den Charakter der vorliegenden Note, welche nur eine kurzgefaßte Übersicht bieten soll, wurden Detailrechnungen dieser Art unterlassen.

[7] Vgl. *W. Blaschke*, loc. cit. Fußnote 1; Formel 39, 63 und 66.

[8] Die Voraussetzungen können vermutlich noch stark gemildert werden.

existieren. Für Eikörper A mit regulärem Rand lassen sich die vier in der linksstehenden Kolonne der unten folgenden Tafel eingetragenen Funktionale bilden. Hierbei soll dF das Oberflächendifferential, dV das Volumdifferential von A, K die Gaußsche Krümmung, H die mittlere Krümmung und endlich r die Distanz vom Ursprung Z bezeichnen. Approximation durch Eikörper ermöglicht eine Ausdehnung der betrachteten Funktionale auf beliebige konvexe Körper. Die hierzu notwendige Stetigkeit des Eikörperfunktionals läßt sich nachweisen. Die auf diese Weise erzeugten vier Funktionale sind dann additiv und die sich nach Ansatz (20) ergebenden Integralfunktionale außerdem bewegungsinvariant und stetig. Die nun mögliche Anwendung des Funktionalsatzes liefert die vier in der rechtsstehenden Kolonne der nachfolgenden Tafel eingetragenen Relationen:

$$C_p(A) = \int p(r)\, K\, dF; \qquad \frac{1}{8\pi^2} \int C_p(A^x)\, dx = a\, C; \tag{25}$$

$$M_p(A) = \int p(r)\, H\, dF; \qquad \frac{1}{8\pi^2} \int M_p(A^x)\, dx = a\, M; \tag{26}$$

$$F_p(A) = \int p(r)\, dF; \qquad \frac{1}{8\pi^2} \int F_p(A^x)\, dx = a\, F; \tag{27}$$

$$V_p(A) = \int p(r)\, dV; \qquad \frac{1}{8\pi^2} \int V_p(A^x)\, dx = a\, V. \tag{28}$$

Mit dieser letzten nur sehr flüchtig angedeuteten speziellen Anwendung ist ein Hinweis auf eine weiterführende Verallgemeinerungsmöglichkeit der integralgeometrischen Lehrsätze gegeben. Bei dem hier betrachteten besonderen Fall kann man von Bewegungsintegralen im kugelsymmetrischen skalaren Feld sprechen. Erweiterungen auf allgemeinere skalare und vektorielle Felder liegen nahe. Es scheint, daß sich z. B. die kinematischen Hauptformeln (21) bis (24) interpretieren lassen als Integralrelationen für die Bewegung eines Körpers A in einem sehr speziellen Feld, das in diesem Sonderfall durch den ruhenden Körper A_0 erzeugt ist.

Buchbesprechungen.

Kritik der Wissenschaft. Von *A. Winkler.* (Sammlung: „Die Universität": Band 13) 384 S. Wien-Stuttgart: Humboldt-Verlag. 1950. Geb. S 29.50.

Das Buch unterzieht sich der schwierigen und undankbaren Aufgabe, das Fundament der Wissenschaft einer kritischen Durchleuchtung zu unterziehen und auf dem Boden dieser Kritik fußend ein neues Weltbild zu entwickeln, das den logischen und ethischen Forderungen unserer Zeit entspricht. Zu diesem Zwecke werden die Grundbegriffe der Nationalökonomie, Philosophie, Physik u. a. genau untersucht, wobei vielfach etymologischen Momenten Rechnung getragen wird. Ob aber z. B. die sprachliche Entwicklung des Wortes „Kraft" und die Feststellung, daß diese es klar mache, daß „die Kraft als das gerade Gegenteil dessen erkannt wird, was die landläufige Lehre uns sagt" (S. 152), für den per definitionem von der Mechanik eingeführten Kraftbegriff von Bedeutung ist, bleibe dahingestellt. Scharf definierte Begriffe, auch wenn sie in der Umgangssprache bereits eine Bedeutung besitzen, werden ja gerade durch ihre eindeutige Erklärung von dieser abgehoben, so daß der sprachgeschichtliche Zusammenhang nicht mehr gegeben ist. Die sehr interessante und lesenswerte allgemein philosophische Orientierung des Verf., von ihm als Ephexesmus bezeichnet, trägt wohl stark sollipsistische Züge, doch fühlt sich Ref. zu einer Auseinandersetzung mit den inhaltsreichen Darlegungen des Buches i. a. nicht berechtigt. Es soll daher nur mehr einiges gesagt werden, was vom Standpunkt des Mathematikers nicht unwidersprochen bleiben kann. Wenn Verf. S. 151 meint, daß „...die gesamte Mathematik darauf ausgehe, das Nacheinander im Entstehen unseres Weltbildes eindeutig darzustellen", dann steht dies mindestens mit der Erkenntnis im Widerspruch, daß die Mathematik nichts über die Welt aussagt. Es ist irreführend, zu sagen, daß „die Dimension heutzutage in der Geometrie einen Rauminhalt besage", es werden weiter nicht nur „Dimensionen von der 0-ten bis zu n-ten anerkannt", sondern z. B. auch unendlich viele. Es ist weder falsch noch richtig, die Zeit als vierte Dimension aufzufassen, aber es kann dies zweckmäßig sein, wie es sich aus der Relativitätstheorie ergibt usw.

Nicht unwidersprochen kann auch der Abschnitt über das Unendliche bleiben. Bekanntlich arbeitet zwar der Mathematiker in der Analysis vielfach mit dem potentiell Unendlichen, aber seit Cantor hat auch das Aktual Unendliche Heimatrecht in der Mathematik. Die Aussage, daß es eine unendliche Zahlenreihe in der Mathematik gebe, ist deswegen nicht leer, weil dies genau präzisiert heißt: Die Gesamtheit der natürlichen Zahlen (und der darauf basierenden Zahlentheorie) kann widerspruchsfrei gedacht werden. Jedes andere Kriterium als die Widerspruchsfreiheit scheint auch — bei Verzicht auf spekulative Untersuchungen — für unendliche Gesamtheiten sinnlos. Verf. bleibt bei der Besprechung der Zahlenreihe etwa auf dem Standpunkt stehen, welchen Hilbert als finit gekennzeichnet hat. Wenn Verf. sagt, daß „Die Analysis des Unendlichen bloß der Grenzwert des körperlich noch Erfaßbaren meint" (S. 202), dann

trifft dies zumindest für die Mathematik wie gerade auseinandergesetzt, nicht zu. Der Vorwurf eines unexakten Begriffes in einer exakten Wissenschaft kann sich daher nicht auf die Mathematik beziehen.

Gerade die Tatsache, daß nicht alles widerspruchslos hingenommen werden kann, kennzeichnet schon das Interesse, welches dem Werk begegnen wird. Es ist sicher, daß es bald im Mittelpunkt einer angeregten Diskussion stehen wird, wozu es die klaren Darlegungen, die flüssige Darstellung und der weitumfassende Inhalt prädestinieren. *L. Schmetterer*, Wien.

Einführung in die höhere Analysis. Von *E. Lindelöf* und *E. Ullrich*. Zweite Auflage. IX, 526 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1950.

Da es sich um einen völlig unveränderten Neudruck der Erstauflage von 1934 handelt, erübrigt sich eine eingehende Besprechung. Es sei daher nur der Befriedigung Ausdruck gegeben, daß das bewährte Lehrbuch, dessen Methode vielfach eigene Wege geht und dabei mancherlei bringt, das in den meisten Darstellungen nicht zu finden ist, nunmehr wieder — und zwar in friedensmäßiger Ausstattung — im Buchhandel zu haben ist. *J. Radon*, Wien.

Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure. Von *R. Zurmühl*. Mit 25 Textabb., XV, 427 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1950. Geb. DM 25.50.

In der Physik und Technik spielen die linearen Beziehungen eine fundamentale Rolle. Daher ist die lineare Algebra auch für die Anwendungen von großer Bedeutung. In der Matrizenrechnung hat sich die lineare Algebra ein Ausdrucksmittel von besonderer Anpassungsfähigkeit geschaffen. Was früher durch umständliche Gleichungssysteme dargestellt wurde, wird nun in einfacher und übersichtlicher Weise durch Matrizen ausgedrückt. Während der Mathematiker schon lange mit der Matrizenrechnung vertraut ist, ist sie den meisten Ingenieuren noch fremd. Dieses Buch will nun den Ingenieuren die Matrizenrechnung erschließen. Dies gelingt durch eine lebendige und verständliche Darstellung. Die Probleme und Begriffe werden klar auseinandergesetzt und der Leser wird in den Stand gesetzt, damit zu operieren. Die vielen, vollständig durchgerechneten Beispiele zeigen, wie man mit Matrizen praktisch rechnet. Der Aufbau ist mehr von pädagogischen Gesichtspunkten vollzogen, als von rein logischen Überlegungen. So wird im 1. Kap. das Einfachste über den Matrizenkalkül gebracht, das, was der Leser unbedingt braucht, um die Matrizen anwenden zu können. Es werden Tatsachen über Determinanten und lineare Gleichungssysteme vorausgesetzt, die der Leser aus den Mathematik-Vorlesungen flüchtig kennt. Diese Tatsachen aber werden dann im 2. Kap. größtenteils bewiesen, womit eine Vertiefung des Wissens erreicht wird. Das 2. Kap. handelt von linearen Gleichungssystemen und der fundamentalen Bedeutung des Ranges der zugehörigen Matrizen. Das 3. Kap. bringt die mit den linearen Abbildungen eng verwandten quadratischen und bilinearen Formen. Besonders ausführlich wird das Eigenwertproblem im 4. Kap. behandelt, während das 5. Kap. durch die Elementarteilertheorie eine Vertiefung über die Struktur der Matrizen bringt. Die letzten beiden Kapitel zeigen, wie wertvoll die Matrizenrechnung für die Anwendungen ist (Auflösung linearer Gleichungssysteme durch Matrizen, Bestimmung der Eigenwerte, Matrizen in der Elektrotechnik und in der Schwingungslehre, Matrizen bei Systemen von linearen Differentialgleichungen und in der Ausgleichsrechnung). Das Buch wird dazu beitragen,

daß die Matrizenrechnung bald ein wertvolles Hilfsmittel moderner Ingenieurmathematik wird. Die Darstellung ist allgemein gehalten, nicht bloß auf technische Anwendungen zugeschnitten. Wenn auch das Buch in erster Linie für Ingenieure geschrieben ist, so ist es auch den Mathematikern sehr zu empfehlen.

N. Hofreiter, Wien.

The Foundations of Geometry. Von *G. de B. Robinson.* (Mathematical Expositions: Nr. 1) VIII, 168 S. Toronto: The University of Toronto Press. 1946.

Die Sammlung, deren ersten Band das in erster Auflage 1940 erschienene Werkchen bildet, will in Form kurzer Monographien in höhere Gebiete der Mathematik einführen. Dementsprechend bietet der Verfasser eine gut lesbare, durchaus strenge Darstellung der Grundlagen der Geometrie. Auf eine kurze Einleitung, die die historische Entwicklung des Gegenstandes, den Raumbegriff und die Rolle der Axiomatik behandelt, folgt zunächst die Axiomatik der projektiven Geometrie, an die der Übergang zur Affingeometrie und der euklidischen Maßgeometrie angeschlossen wird. Dann wird der umgekehrte Weg beschritten: ausgehend von einer Axiomatik der euklidischen Geometrie wird durch Einführung idealer Elemente (nach F. Schur) die projektive Geometrie erhalten. Nach einem vorbereitenden Kapitel über Zahlen, Ringe und Körper werden dann Koordinaten eingeführt, hierauf die Anordnungs- und Stetigkeitsaxiome sowie die Rolle des Satzes von Desargues beim Aufbau der ebenen Geometrie erörtert. Ein Abschnitt über Kollineation, Korrelation und imaginäre Elemente beschließt das Werk, dem noch ein kurzer Anhang über die Axiomatik von Huntington (Math. Ann., Bd. 73) angefügt ist.

Wer vor einem eingehenderen Studium sich rasch und bequem über die Grundlagen der Geometrie orientieren will, wird aus der Darstellung des Verfassers reichen Nutzen ziehen. Auch für den Studenten ist das Buch, das alles Wesentliche enthält und keinerlei Vorkenntnisse voraussetzt, wärmstens zu empfehlen.

J. Radon, Wien.

Géométrie Algébrique. Von *L. Godeaux.* I. Band: Transformations birationnelles. Géométrie projective hyperspatiale. 236 S. — II. Band: Géométrie sur une courbe algébrique. Géométrie algébrique du plan. 210 S. Liège: Sciences et Lettres. 1948—1949.

Im Gegensatz zu anderen mathematischen Disziplinen gibt es für die algebraische Geometrie fast keine Lehrbücher der neueren Zeit, welche in übersichtlicher und leicht faßlicher Darstellung das Spezialgebiet dieser Wissenschaft erschließen; das mag vielleicht darin begründet sein, daß diesem Zweig unserer höheren Geometrie trotz den bedeutenden Fortschritten und interessanten Ergebnissen, die besonders die italienische Schule erzielt hat, noch einige Unklarheiten in den Grundlagen und Mängel in den Methoden anhaften, die mit den bisherigen elementaren Mitteln schwer zu beseitigen sind und besonders die mehrdimensionale Theorie schwierig gestalten. Um so mehr ist es zu begrüßen, daß der bestens bekannte Verfasser hier ein ausgezeichnetes Lehrbuch der algebraischen Geometrie geschaffen hat, das zwar die Auseinandersetzung mit den angedeuteten schwierigen Problemen vermeidet, dafür aber für den Anfänger leicht verständlich und übersichtlich ist. Zu den zwei vorliegenden Bänden ist noch eine „Einführung in die höhere Geometrie", die 1946 im selben Verlag erschienen ist, hinzuzufügen und ein dritter Band über die „Geometrie auf algebraischen Flächen" zu erwarten. Es darf noch hervorgehoben werden,

daß nicht nur der allgemeine Aufbau des Werkes, das mit den Cremonatransformationen der Ebene beginnt, einer sehr glücklichen originellen Idee entspringt, sondern auch die Ausarbeitung der einzelnen Abschnitte, die vielfach bis zu den neuesten Resultaten hinführen, die eigene Forschungstätigkeit des Verfassers verrät. Zur überschlägigen Orientierung diene ein kurzes Inhaltsverzeichnis der beiden Bände: I. Die birationalen Transformationen (Singuläre Punkte ebener Kurven; birationale Transformationen der Ebene; singuläre Punkte von Flächen; birationale Transformationen des Raumes; Beispiele und Anwendungen). II. Projektive mehrdimensionale Geometrie (Projektivitäten; algebraische Mannigfaltigkeiten; rationale Kurven und Flächen in mehrdimensionalen Räumen; Segresche Mannigfaltigkeiten; Liniengeometrie). III. Geometrie auf algebraischen Kurven (Lineare Punktscharen und ihre fundamentalen Eigenschaften; Korrespondenzen zwischen algebraischen Kurven; Riemannsche Flächen; Abelsche Integrale; Korrespondenzformeln von Hurwitz; reduzible Abelsche Integrale). IV. Algebraische Geometrie auf der Ebene (Lineare Systeme von ebenen algebraischen Kurven; adjungierte Systeme; Anwendungen auf zyklische und kontinuierliche Gruppen birationaler Transformationen; die Involutionen 2. Ordnung in der Ebene).

W. Gröbner, Innsbruck.

Grundlagen und analytischer Aufbau der Geometrie. Von *L. Heffter*. Zweite Auflage. Mit 66 Textabb., 192 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1949.

Es ist für den Kenner des Lehrbuches der analytischen Geometrie des Verf. eine Selbstverständlichkeit, in den „Grundlagen" die meisterhafte, klare und vielfach eigenständige Darstellung Heffters wieder zu finden, wobei der Natur des Buches entsprechend die logische Sauberkeit besonders in die Augen springt. Ohne Umweg wird konsequent der Aufbau des Erlanger Programms durchgeführt: Axiomatische Grundlegung der projektiven Geometrie, Übergang zur Affingeometrie durch Auszeichnung einer uneigentlichen Ebene und schließlich der Schritt zur Ähnlichkeitsgeometrie durch Auszeichnung einer „orthogonalen Polarfigur" in der uneigentlichen Ebene. Dies sowie ein Hinweis auf das Verhältnis zwischen projektiver Geometrie einerseits und der hyperbolischen und elliptischen Geometrie anderseits ist der Inhalt des ersten Abschnittes. Sehr willkommen wird dem Leser sein, daß dem streng axiomatischen Aufbau die Interpretation im Anschauungsraum beigegeben ist. Die nächsten drei Abschnitte besprechen ausführlich die projektive (Grundgebilde 1., 2., 3. Stufe), die Parallelen und Orthogonalgeometrie. Dem Zweck des Buches gemäß wird immer das Wesentliche herausgearbeitet, doch spürt man überall die Hand des Geometers: Die logische Geschlossenheit der Darstellung artet nirgends in ein Spiel mit Begriffen aus. Durch Auszeichnung eines allgemeinen Maßkegelschnittes gelingt es im nächsten Abschnitt gleichzeitig die beiden nichteuklidischen Geometrien und die euklidische zu behandeln. Sehr hübsch ist die Zusammenstellung von „Realisierungen" der hyperbolischen und elliptischen Geometrie. Neben der Darstellung der ebenen elliptischen Geometrie im Bündel und auf der Halbkugel, der ebenen hyperbolischen auf der Pseudosphäre findet man auch deren Realisierung auf dem zweischaligen Rotationshyperboloid. Die vom Verf. stammende Modifizierung der Kleinschen Darstellung eignet sich besonders zur Darstellung der Verhältnisse im hyperbolischen und elliptischen Raum. — Das Buch ist wie kein anderes geeignet dem fortgeschrittenen Studenten oder dem Lehrer rasch einen Überblick und zuverlässige Belehrung über das Gebiet zu verschaffen. Es ist selbstverständlich, daß das Buch schnell jene Beliebtheit erlangen wird, die ihm zukommt. *L. Schmetterer*, Wien.

Geometrie. Von *H. G. Forder*. (Hutchinson's University Library: Mathematical and Physical Sciences. Herausgegeben von E. A. Milne: Nr. 19) Mit 120 Textabb., 200 S. London: Hutchinson & Co., Ltd. 1950. Geb. 7 s. 6 d. net.

Wir machen an der Hand des Verfassers einen äußerst reizvollen Spaziergang durch das Gesamtgebiet der Geometrie, der von fast allen Teilgebieten einen Überblick und einen Einblick in ihre Methodik gibt. Bewußt übergangen hat der Verfasser nur Grassmanns Ausdehnungslehre, über die er ein eigenes Buch geschrieben hat. So ist ein sehr ansprechendes Büchlein zustande gekommen, das der Student gern zur Hand nehmen wird, wenn er eine Übersicht über das weite Feld geometrischer Forschung gewinnen will, dessen sich aber auch der Lehrer mit Nutzen bedienen wird, um Anregungen für die Stoffauswahl im Unterricht zu bekommen. Ein Wort noch über die zahlreichen Figuren: sie sind in ungewohnt primitiver Weise ausgeführt. Das schadet nichts, solange sie korrekt gezeichnet sind, hat vielleicht sogar einen gewissen Reiz. Aber Fig. 26 (Kardioide) und Fig. 31 (Kettenlinie als Evolute der Traktrix) sind abschreckende Beispiele dafür, wie eine Spitze nicht gezeichnet werden darf!

J. Radon, Wien.

Advanced Plane Geometry. Von *C. Zwikker*. Mit 273 Textabb., 310 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1950. Geb. hfl. 20.—, $ 5.50.

Das Buch enthält eine Fülle von schönen geometrischen Sätzen. Während in den meisten Lehrbüchern der analytischen Geometrie die Kegelschnitte in erster Linie behandelt werden, werden hier die Eigenschaften zahlreicher algebraischer und transzendenter Kurven erörtert (Gerade, Dreieck, Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel, kubische Kurven und höhere algebraische Kurven, Zykloiden, Konchoiden, Zissoiden, Spiralen, Lemniskate, Schneckenlinie, Kettenlinie, Traktrix, Evoluten und Evolventen, Fußpunktkurven, einhüllende von Kurvenscharen, orthogonale Trajektorien...). Die Darstellung ist eigenartig. Die Punkte werden nicht durch die cartesischen Koordinaten (x, y), sondern durch komplexe Zahlen $(z = x + jy)$ dargestellt. Dadurch werden die uns bekannten Kurven durch Gleichungen wiedergegeben, an die man sich erst gewöhnen muß. Man muß gestehen, daß die Darstellung durch komplexe Zahlen im Vergleich zu den cartesischen Koordinaten oft Vorteile bietet. Interessant sind die Beziehungen zur Funktionentheorie. Das Buch setzt geringe Kenntnisse der Differential- und Integralrechnung und auch der ebenen Geometrie voraus. Die Überlegungen sind anschaulich, gerade so, wie sie bei Physikern und Ingenieuren beliebt sind. Vom Standpunkt der reinen Mathematik läßt die Darstellung oft an Exaktheit zu wünschen übrig. Das Buch bringt zahlreiche Anwendungen auf Physik und Technik und wird mit Recht viele begeisterte Leser finden.

N. Hofreiter, Wien.

Vektoranalysis. Von *S. Valentiner*. Siebente Auflage. (Sammlung Göschen: Nr. 354) Mit 19 Textabb., 138 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1950. DM 2.40.

Die neue Auflage unterscheidet sich nicht wesentlich von den letzten Auflagen. Anlage und Aufbau sind gleich geblieben; größtenteils auch der Text; nur kleine Ergänzungen und kleine Änderungen wurden vorgenommen. Das Buch ist von einem Physiker geschrieben und bringt seht gut die physikalische Bedeutung der Vektoren und die Anwendungen der Vektoranalysis auf physikalische Gebiete. Die Mathematiker lehnen „unendlich kleine" Größen ab und sind daher von der Darstellung unbefriedigt. Im letzten Abschnitt würden wir auch die Matrizenrechnung mehr heranziehen.

N. Hofreiter, Wien.

Vektorenanalysis. Von *R. Gans*. Siebente Auflage. 120 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1950.

Dies ist die siebente Auflage des bekannten und beliebten Büchleins, die sich gegenüber der sechsten nur um einige kleine Verbesserungen unterscheidet. Die Neuauflage der „Vektorenanalysis" kommt einem dringenden Bedürfnis der Studierenden entgegen und kann jedem wärmstens empfohlen werden — wenn es einer solchen Empfehlung überhaupt noch bedarf. *K. Pracher*, Wien.

Ausgleichsrechnung. Von *V. Happach*. Zweite Auflage. (Teubners Mathematische Leitfäden: Band 18) Mit 26 Textabb., 104 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1950.

Das Buch enthält den üblichen Apparat der Ausgleichsrechnung, Einteilung der Fehler, Fehlerfortpflanzung, Normalgleichungen usw., zeichnet sich aber vor anderen durch eine große Anzahl sehr hübscher Beispiele aus, die allen möglichen Gebieten entnommen sind. Jeder Begriff, und jeder Satz wird sofort an Hand nummerischer Angaben erläutert. Sicherlich würde das Büchlein noch an Wert gewinnen, wenn auch auf den wahrscheinlichkeitstheoretischen Sachverhalt näher eingegangen und ein Wort über die hieher gehörigen statistischen Testverfahren zu finden wäre. In einer Zeit fortschreitender Durchdringung der Naturwissenschaften mit mathematischen Hilfsmitteln könnte man auch mit Erfolg den Matrizenkalkül heranziehen. Der an den klassischen Verfahren interessierte Praktiker wird jedoch gerne und mit viel Gewinn zu diesem in dieser Beziehung ausgezeichneten und leicht verständlichen Behelf greifen.

L. Schmetterer, Wien.

Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenschiebers. Von *A. Rohrberg*. Achte Auflage. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek: Reihe I, Nr. 23) 59 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1950.

Die neue Auflage bringt eine gründliche Umarbeitung des Textes und stellt eine Anleitung dar, die zu den jetzt üblichen Rechenstäben paßt. In leicht verständlicher Art werden die Rechenverfahren auseinander gesetzt, die man in der Praxis braucht. Besonders wertvoll für den Leser sind die zahlreichen Beispiele. *N. Hofreiter*, Wien.

Einführung in die Quantenphysik. Von *H. Teichmann*. Zweite Auflage. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek: Reihe II, Nr. 13) 104 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1950.

Das Buch stellt eine einfache Einführung in die Quantenphysik dar und ist für naturwissenschaftlich Interessierte bestimmt. Daß eine zweite Auflage erforderlich wurde, zeigt, daß das Buch seinen Zweck voll erfüllt. In der zweiten Auflage wurden auch die neueren Untersuchungen von O. Hahn über Kernspaltung aufgenommen und dadurch wurde das Buch auf den neuesten Stand der Forschung gebracht. Inhalt: I Ursprung des Quantenbegriffes, II Korpuskel und Welle, III Quant und Elektron, IV Quant und Atomhülle, V Quant und Atomkern, VI Quant und Wärmestrahlung. *E. Hlawka*, Wien.

Einführung in die Farbenlehre. Von *G. Klappauf*. 135 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1949.

Die Farbenlehre ist ein Grenzgebiet zwischen Physik, Physiologie und Psychologie. Einführend werden die Grundlagen jeder dieser drei Wissenschaften, soweit sie für die Farbenlehre von Belang sind, zusammengestellt. Den Hauptteil des Buches nehmen die Beziehungen zwischen Licht und Farbe ein, und zwar

insbesondere die Systematik der Farben in der Farbtüte, beziehungsweise dem Farbdreieck. Die Berechnung der Lage der Farbe im Farbdreieck aus der spektralen Zusammensetzung des Lichtes wird gezeigt, wobei die Newton'schen Interferenzfarben als Beispiel angeführt sind. Die hiefür notwendige spektrale Verteilung der Eichanteile der drei Grundfarben wurde tabellarisch zusammengestellt, wodurch der praktische Wert des Buches wesentlich erhöht wird. Auf Grund der eingangs behandelten experimentellen Tatsachen werden die Vor- und Nachteile der verschiedenen physiologischen Theorien besprochen. Ein leider äußerst knapper Überblick über die Anwendung und die Photometrie schließt das Büchlein. Bei der Erklärung der photometrischen Einheiten fehlt die Definition der „neuen Kerze", wodurch das ganze System der physikalischen Realisierbarkeit entbehrt. Die Symbolik für Licht und Farben ist an sich nicht unbedingt notwendig; wenn sie jedoch verwendet wird, so bedarf sie einer klareren Fundierung, sowie des Beweises der Zulässigkeit der damit ausgeführten Rechenoperationen. *R. Herzog*, Wien.

Internationaler Kongreß über Kernphysik und Quantenelektrodynamik in Basel im September 1949. (Sonderdruck aus „Helvetica Physica Acta", Band 23, Suppl. III.) Basel: E. Birkhäuser. 1950.

Die Vorträge des Kongresses wurden ihrem Inhalte nach gruppiert und in übersichtlicher Form zusammengestellt. Die eine Gruppe befaßt sich mit der Erzeugung energischer Teilchen, eine andere mit deren Nachweis. Diese experimentell-technischen Arbeiten nehmen etwa zwei Drittel des Buches ein. Es folgt ein Kapitel über experimentelle Ergebnisse der Kernphysik sowie zwei kleine theoretische Kapitel über die Theorie der Atomkerne und über Quantenelektrodynamik. Die meist in englischer Sprache verfaßten Referate sind nicht zu knapp gehalten und wurden durch reiche Literaturangaben ergänzt, die auch dem Spezialisten manch wertvollen Hinweis bieten. Da es sich nicht nur um Spezialarbeiten handelt, sondern da vielmehr auch einige Sammelreferate über größere Gebiete vorkommen, kann das Buch auch Personen empfohlen werden, die dem Gebiete ferner stehen, die sich jedoch über den gegenwärtigen Stand der Experimentiertechnik und der Theorie informieren wollen.

R. Herzog, Wien.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Johann Radon, Wien XVIII., Herbeckstraße 5. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

Integraltafel

Herausgegeben von

Wolfgang Gröbner
o. Professor an der Universität Innsbruck

Nikolaus Hofreiter
a. o. Professor an der Universität Wien

Soeben erscheint:

Zweiter Teil:

Bestimmte Integrale

VI, 204 Seiten. 4°. 1950. S 87.—, DM 24.—, $ 5.80, sfr. 25.—

Der zweite Teil enthält vor allem solche Integrale, die im ersten nicht vorkommen, weil die betreffenden Integralfunktionen nicht näher bekannt oder nicht tabelliert sind, so daß nur bei speziellen Grenzen bekannte Zahlenwerte oder Parameterfunktionen auftreten. Um jedoch praktischen Bedürfnissen entgegenzukommen, wurden auch viele Integrale, die schon im ersten Teil verzeichnet sind, für spezielle, besonders häufige Grenzen berechnet und in den zweiten Teil aufgenommen. Die Einteilung und Anordnung der Formeln ist analog derjenigen des ersten Teiles durchgeführt.

Früher erschien:

Erster Teil:

Unbestimmte Integrale

VIII, 166 Seiten. 4°. 1949. S 54.—, DM 18.—, $ 5.40, sfr. 23.50

Aus den Besprechungen zum ersten Teil:

„. . . . Die vorliegende Tafel vereint in günstiger Weise theoretisch exakte Ausführlichkeit und praktisch handliche Übersicht. Sie scheut die Aufzählung der einfachsten Fälle ebensowenig wie die der verwickeltsten. Das Buch ist gegliedert in die drei Abschnitte: 1. rationale Integranden, 2. algebraisch irrationale Integranden, 3. transzendente Integranden. Die Verfasser gehen vom Standpunkt der komplexen Funktionentheorie aus, die auch auf reelle Integrale ein aufklärendes Licht wirft. Kurze textliche Anleitungen und Betrachtungen der nötigen Transformationen erheben das Werk über den Rahmen einer reinen Formelsammlung. Dies macht sich besonders bei den im zweiten Abschnitt einbegriffenen elliptischen und hyperelliptischen Integralen geltend. Am Schlusse des dritten Abschnittes ist auch der Weierstraßschen wie der Jacobischen elliptischen Funktionen gedacht."

Acta Physica Austriaca

„. . . . Die Anordnung ist sehr übersichtlich, der Stoff erstaunlich vollständig, der Text trotz seiner Knappheit überall leicht verständlich und aufschlußreich. Wer die Tafel aufmerksam durchblättert, stößt immer wieder auf Stellen, wo er gerne Zeile für Zeile liest, den überall eingestreuten Hinweisen auf Zusammenhänge mit anderen Formeln des Buches nachgeht und die in wenigen Worten treffend beschriebenen verschiedenen Möglichkeiten, eine Aufgabe zu lösen, überdenkt. Die Tafel will zwar kein Lehrbuch sein, aber sie ist äußerst lehrreich und ein unerschöpfliches Übungsbuch."

Monatshefte für Mathematik, Wien